Машински факултет, Београд 2.4.2021.

**Први колоквијум из Математике 2**

Група 1

1. Израчунати $I_1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt{x})^2}$.
2. Израчунати $I_2 = \displaystyle\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.
3. Израчунати $I_3 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x$.
4. Наћи запремину тела насталог ротацијом дела равни ограниченог параболама $y{=}x^2{-}1$ и $y{=}3{-}x^2$ око $x$-осе.

## Решења.

1. $$I_1 = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = 2\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = 2\ln|1+t| + \frac{2}{1+t} + C$$
$$= 2\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{2}{1+\sqrt{x}} + C.$$

2. $$I_2 = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = \sin x\cos^2 x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = 1/\cos x \end{bmatrix} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$$
$$= \frac{x}{\cos x} - \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C.$$

3. Одговарајући неодређени интеграл је
$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-1+3}{\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-x)}{\sqrt{x^2-x}} + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1/2)^2-1/4}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2-x}}{1/2} + \frac{3}{2}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x}) + C,$$
па је
$$I_3 = \left(\sqrt{x^2-x} + \frac{3}{2}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x})\right)\Big|_{-1/2}^{0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\ln(2-\sqrt{3}) \approx 1,10941.$$

Машински факултет, Београд 8.4.2022.

**Први колоквијум из Математике 2**

Група 1

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.
2. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2-\sin x}\,\mathrm{d}x$.
3. Израчунати $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(e^x+e^{-x})^2}$.
4. Наћи површину тела насталог ротацијом дела равни ограниченог кривом $y{=}\cos x$ око $x$-осе за $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Машински факултет, Београд 7.4.2023.

**Први колоквијум из Математике 2**

Група 1

1. Израчунати $\int \sqrt{x^2-x+3}\,\mathrm{d}x$. 2. Израчунати $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-\cos x)^2}$. 3. Израчунати $\int_1^e \frac{\ln^2 x\,\mathrm{d}x}{(\ln x+2)^2}$.

4 Наћи запремину тела насталог ротацијом дела равни ограниченог кривом $y=\arcsin 3x$ око $x$-осе за $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$.

## Решења

1.

$$\int \sqrt{x^2-x+3}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{sh}\,t \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{11}{4}\int \mathrm{ch}\,^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4}\int \frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}$$

$$= \frac{11}{16}\mathrm{sh}\,2t + \frac{11}{8}t + C = \frac{11}{16}2\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{\mathrm{sh}\,^2 t+1} + \frac{11}{8}t + C = \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{x^2-x+3} + \frac{11}{8}\mathrm{arsh}\,\frac{2x-1}{\sqrt{11}} + C.$$

2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-\cos x)^2} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t,\ \ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = 2\int \frac{1+t^2}{(1+3t^2)^2} = \cdots$$

3.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x\,\mathrm{d}x}{(\ln x+2)^2} = \begin{bmatrix} \ln x = t,\ x=e^t \\ \mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{t^2e^t\,\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = \begin{bmatrix} u=t^2e^t & \mathrm{d}v = \mathrm{d}t/(t+2)^2 \\ \mathrm{d}u = (2t+t^2)e^t\,\mathrm{d}t & v=-1/(t+2) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{t^2e^t}{t+2}\Big|_0^1 + \int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u=t & \mathrm{d}v=e^t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & v=e^t \end{bmatrix} = -\frac{e}{3} + te^t\Big|_0^1 - e^t\Big|_0^1 = -\frac{e}{3}+1.$$

4.

$$V = \int_0^{1/3} \arcsin^2 3x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u=\arcsin^2 3x & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 6\arcsin 3x/\sqrt{1-(3x)^2} & v=x \end{bmatrix} = x\arcsin 3x\Big|_0^{1/3} - \int_0^{1/3} \frac{6x\arcsin 3x}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{bmatrix} \arcsin 3x = t,\ x=\frac{1}{3}\sin t \\ 3\,\mathrm{d}x/\sqrt{1-(3x)^2} = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} t\sin t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u=t & \mathrm{d}v=\sin t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t & v=-\cos t\,\mathrm{d}t= \end{bmatrix} = \cdots$$