# Први колоквијум (пример 1)

1. Израчунати интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^5}}$.

2. Израчунати интеграл $\int_0^1 x^2 \ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x$.

3. Наћи $\int_0^\pi \frac{\sin 153x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

4. Наћи запремину тела насталог ротацијом криве $y = \left(x^2+\frac{3}{x^2}\right)^{-3/4}$ око $x$-осе за $x \geqslant 0$.

## Решења.

1. Решавамо помоћу неколико очигледних смена:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^5}} = \begin{bmatrix} x = t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{t^3+t+t^5} = 3\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = \begin{bmatrix} t^2 = u \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{bmatrix}$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{((2u+1)/\sqrt{3})^2+1} = \begin{bmatrix} (2u+1)/\sqrt{3} = p \\ 2\,\mathrm{d}t/\sqrt{3} = \mathrm{d}p \end{bmatrix}$$
$$= \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2+1} = \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\ p + c = \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\ \frac{2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{3}} + c.$$

2. Овде користимо парцијалну интеграцију:

$$\int_0^1 x^2\ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(1+3x^2) & \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{6x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x & v = \dfrac{x^3}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln(1+3x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^4}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{9x^4-1+1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 (3x^2-1)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}x = t \\ \sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$$
$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}(x^3-x)\Big|_0^1 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\ t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,32774.$$

3. Означимо $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$ и пођимо од израза $I_n - I_{n-2}$. Ако искористимо формулу $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, тај израз се своди на

$$I_n - I_{n-2} = 2\int_0^\pi \frac{\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^\pi = 0,$$

па је $I_n = I_{n-2}$. У нашем случају је $I_{153} = I_{151} = \cdots = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi$.

4. Знамо да је запремина тела добијена ротацијом криве $y = y(x)$ око $x-$осе за $x \in [a,b]$ једнака $\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. У нашем случају запремина $V$ ће бити несвојствени интеграл

$$\pi\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+3/x^2)^{3/2}} = \pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x^4+3)^{3/2}}.$$

Увођењем смене $x^4+4 = t$, $4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, при чему је $t=3$ када је $x=0$ и $t = b^4+3$ када је $x = b$, добијамо

$$V = \frac{\pi}{4}\lim_{b\to\infty}\int_3^{b^4+3} t^{-3/2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\lim_{b\to\infty} t^{-1/2}\Big|_3^{b^4+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069.$$

## Први колоквијум (пример 2)

1. Израчунати $\int x^2 \mathrm{arctg}\, 2x^2\, \mathrm{d}x$.
2. Израчунати $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x}}$.
3. Израчунати $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.
4. Наћи дужину лука криве $y = \ln\cos x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

## Решења.

$$1.\ \int x^2 \mathrm{arctg}\, 2x^2\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \mathrm{arctg}\, 2x^2, & \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \dfrac{4x}{1+4x^4}\,\mathrm{d}x, & v = x^3/3 \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\ 2x^2 - \frac{1}{3}\int \frac{4x^4+1-1}{1+4x^4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\ 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^4}.$$

Даље је $\frac{1}{4x^4+1} = \frac{Ax+B}{2x^2+2x+1} + \frac{Cx+D}{2x^2-2x+1}$, одакле се добија $A = B = D = \frac{1}{2}$ и $C = -\frac{1}{2}$, па је

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^4} = \frac{1}{8}\int \frac{4x+2+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \frac{4x-2-2}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\ (2x+1) + \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\ (2x-1) + c.$$

Дакле, полазни интеграл је $\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\ 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x-1} + \frac{1}{12}\mathrm{arctg}\ (2x+1) + \frac{1}{12}\mathrm{arctg}\ (2x-1) + c$.

2. Ако уведемо Ојлерову смену $\sqrt{x^2+x} = t - x$, $x = \frac{t^2}{1+2t}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t(t+1)}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t$, полазни интеграл $I$ се своди на

$$I = \int \frac{2t(t+1)}{t(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t+1+1}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2},$$

одакле сменом $2t+1 = u$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/2$ добијамо

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2u} + c.$$

Враћањем на полазну променљиву добијамо

$$I = \frac{1}{2}\ln(2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1} + c.$$

Ако приметимо да је $(2\sqrt{x^2+x} + 2x + 1)(2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1) = -1$, тада је

$$I = \frac{1}{2}\ln(2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1) + \sqrt{x^2+x} - x + c.$$

3. Дати интеграл $I$ је несвојствен - има неограничену горњу границу и подинтегрална функција није дефинисана за $x = 1$. Зато ћемо га написати као збир два интеграла $I = I_1 + I_2$, при чему је $I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$ и $I_2 = \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$. Израчунајмо прво неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x-1} = t,\ x = t^2+1 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\ t + c = 2\,\mathrm{arctg}\ \sqrt{x-1} + c.$$

Тада је $I_1 = \lim_{a\to 1} 2\,\mathrm{arctg}\ \sqrt{x-1}\big|_a^2 = \frac{\pi}{2}$, и $I_2 = \lim_{b\to\infty} 2\,\mathrm{arctg}\ \sqrt{x-1}\big|_2^b = \pi - \frac{\pi}{2}$ па ј $I = \pi$.

4. Дужина лука криве $y = y(x)$ за $x \in [a,b]$ се рачуна по формули $L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. У нашем случају је $1 + (y'(x))^2 = 1 + \mathrm{tg}\ ^2 x = 1/\cos^2 x$, па је $L = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x}$. Увођењем смене $\sin x = t$, $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $t = 0$ за $x = 0$ и $t = 1/\sqrt{2}$ за $x = \pi/4$ добијамо да је $L = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0,8814$.

# Први колоквијум (пример 3)

1. Наћи неодређени интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x/2}}$. 2. Израчунати $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

3 Наћи неодређени интеграл $\int(2x-1)\ln x \ln(x-1)\,\mathrm{d}x$.

4 Наћи површину површи добијену ротацијом астроиде $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ око $x-$осе.

## Решења.

1. Означимо са $I$ полазни интеграл. Множењем и дељењем подинтегралне функције са $e^{x/2}$ добијамо интеграл $I=\int\frac{e^{x/2}}{e^{3x/2}+1}\,\mathrm{d}x$ који се сменом $e^{x/2}=t$, $e^{x/2}\,\mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t$ своди на $I=2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$. Даље је $\frac{1}{t^3+1}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}$, одакле се добија $A=\frac13$, $B=-\frac13$ и $C=\frac23$, па је

$$I=\frac23\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\frac23\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=\frac23\ln(t+1)-\frac13\int\frac{2t-1-3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=\frac23\ln(t+1)-\frac13\ln(t^2-t+1)+I_1,$$

где је $I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4}=\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt3}+c$, па је

$$I=\frac23\ln(e^{x/2}+1)-\frac13\ln(e^x-e^{x/2}+1)+\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{arctg}\,\frac{2e^{x/2}-1}{\sqrt3}+c.$$

$$2.\ I=\begin{bmatrix}x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)\sqrt{t^2+t}}=\begin{bmatrix}\sqrt{t^2+t}=tu,\ t=\dfrac{1}{u^2-1}\\ \mathrm{d}t=-2u/(u^2-1)^2\,\mathrm{d}u\end{bmatrix}=-4\int\frac{\mathrm{d}u}{2u^2-u^4}$$

$$=-2\int\frac{2-u^2+u^2}{u^2(2-u^2)}\,\mathrm{d}u=-2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}-2\int\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}=\frac2u+\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt2-u}{\sqrt2+u}\right|+C$$

$$=2\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt x}}+\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+\sqrt x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+\sqrt x}}\right|+C.$$

3. На полазни интеграл $I$ примењујемо парцијалну интеграцију:

$$I=\begin{bmatrix}u=\ln x\ln(x-1) & \mathrm{d}v=(2x-1)\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u=\left(\dfrac{\ln(x-1)}{x}+\dfrac{\ln x}{x-1}\right)\mathrm{d}x & v=x^2-x\end{bmatrix}$$

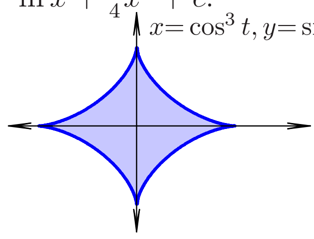
$$=(x^2-x)\ln x\ln(x-1)-\int\frac{(x^2-x)\ln(x-1)}{x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{(x^2-x)\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$=(x^2-x)\ln x\ln(x-1)-\int(x-1)\ln(x-1)\,\mathrm{d}x-\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

Даље је $\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}u=\ln x & \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x/x & v=x^2/2\end{bmatrix}=\frac12x^2\ln x-\frac12\int x\,\mathrm{d}x=\frac12x^2\ln x-\frac14x^2$. Дакле, $I=(x^2-x)\ln x\ln(x-1)-\frac12(x-1)^2\ln(x-1)+\frac14(x-1)^2-\frac12x^2\ln x+\frac14x^2+c$.

4. Тражена површина $P$ је

$$P=2\cdot2\pi\int_0^{\pi/2}y(t)\sqrt{y'(t)^2+x'(t)^2}\,\mathrm{d}t,$$




где је $x'(t)=-3\cos^2 t\sin t$ и $y'(t)=3\sin^2 t\cos t$. Дакле,

$$P=4\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\sqrt{9\sin^4 t\cos^2 t+9\cos^4 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=4\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\cdot3\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\begin{bmatrix}\sin t=u,\ \cos t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u,\\ t=0\Rightarrow u=0,\ t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u=1\end{bmatrix}=12\pi\int_0^1u^4\,\mathrm{d}u=\frac{12}{5}\pi u^5\Big|_0^1=\frac{12}{5}\pi.$$

*Рада Мутавџић Ђукић*