1 Неодређени интеграли

1.1 Примитивна функција и основна правила интеграције

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на неком интервалу I. Функцију $F(x)$ зовемо *примитивном функцијом* функције $f(x)$, ако важи

$$F'(x) = f(x) \quad \text{за све } x \in I.$$

Постоји бесконачно много примитивних функција функције $f(x)$ и све се разликују до на константу: $(F(x)+C)' = f(x)$.

Скуп свих примитивних функција функције $f(x)$ се зове *неодређени интеграл* функције $f(x)$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

У горњој дефиницији функција $f(x)$ се зове *интегранд*, а C је произвољна константа.

Интеграција је процес супротан диференцирању, па таблица основних интеграла следи из таблице извода. У наставку су дати неки основни интеграли, при чему ће они који не следе директно из таблице извода бити изведени касније.

$* \int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$* \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$	$* \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$* \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$* \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
$* \int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$	$* \int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$
$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$* \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$* \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C.$

За неодређени интеграл важе следеће особине:

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a = \text{const}); \qquad \int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Важно је поменути и интеграле који нису елементарни, тј. који се не могу представити преко елементарних функција. Примери таквих интеграла су:

$$\int \sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \ldots$$

Пример 1.1. Израчунати интеграле:

а) $\int (2+3x^2-\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{d}x + 3\int x^2\,\mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x = 2x + 3\cdot\frac{x^3}{3} - \sin x + C = 2x + x^3 - \sin x + C;$

б) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{3/2}\,\mathrm{d}x + 2\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x + \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C;$

в) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$

г) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert + C;$

д) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C;$

ђ) $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C;$

е) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x \mathrm{d}x + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C.$

1.2 Интеграција методом смене

Смена у интегралу одговара изводу сложене функције.

Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Ако је $x = x(t)$ диференцијабилна функција, по правилу за извод сложене функције је

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x(t)) = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t).$$

Интеграцијом претходне једнакости добијамо

$$F(x(t)) + C = \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{тј.} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 1.2. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+3x}} = \begin{bmatrix} 1+3x = t \\ 3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+3x)^2} + C;$

б) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \begin{bmatrix} x^3+1 = t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C;$

в) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \begin{bmatrix} x^2+1 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C;$

г) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} -x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C;$

д) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+1} = \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C;$

ђ) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \mathrm{d}x/x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C;$

е) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x} = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \mathrm{d}x/x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \begin{bmatrix} \ln t = u \\ \mathrm{d}t/t = \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln\ln x| + C.$

Пример 1.3. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$

б) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1-\cos x = t \\ \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|1-\cos x| + C$

в) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t,\ x = t^2, \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2+t} = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{d}t - 4\int \frac{\mathrm{d}t}{2+t}$

$\displaystyle= 2t - 4\ln|2+t| + C = 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + C;$

г) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x+1 = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int (t^4-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C$

$\displaystyle= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C;$

д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}-1} = \begin{bmatrix} x = t^6, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t^3}{t^2-1}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \left(t^6+t^4+t^2+1-\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$

$\displaystyle= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|\right) + C;$

ђ) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^5}} = \begin{bmatrix} x = t^3, \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{t^3+t+t^5} = 3\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = \begin{bmatrix} t^2 = u, \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{bmatrix}$

$\displaystyle= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{((2u+1)/\sqrt{3})^2+1} = \begin{bmatrix} (2u+1)/\sqrt{3} = p, \\ 2\,\mathrm{d}t/\sqrt{3} = \mathrm{d}p \end{bmatrix}$

$\displaystyle= \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2+1} = \sqrt{3}\operatorname{arctg} p + C = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{3}} + C.$

Пример 1.4. Израчунати а) $I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$, б) $I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$, в) $I_3=\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$.

а) Интегранд запишимо у облику $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$.

Множењем леве и десне стране са $(x-1)(x-2)$ добијамо систем

$1=A(x-2)+B(x-1)=(A+B)x-2A-B$.

Изједначавањем коефицијената уз x и уз 1 на левој и десној страни добијамо

$A+B=0,\ -2A-B=1,$ па је $A=-B=-1$ и

$$I_1=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}=-\ln|x-1|+\ln|x-2|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$$

б) Полином у имениоцу нема реалних нула, па се трансформише у облик потпуног квадрата:

$$I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+3/4}=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\frac{(x-1/2)^2}{3/4}+1}=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{((2x-1)/\sqrt{3})^2+1}$$

$$=\begin{bmatrix}(2x-1)/\sqrt{3}=t,\\ 2\,\mathrm{d}x/\sqrt{3}=\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\ t+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

в) $$I_3=\frac{3}{2}\int\frac{2x-2/3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int\frac{1/3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{2}I_2=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 1.5. Израчунати $I=\int\frac{x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x+6\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\right)=\begin{bmatrix}5-4x-x^2=t,\\(-4-2x)\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}-3\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-((x-2)/3)^2}}=\begin{bmatrix}(x-2)/3=u,\\ \mathrm{d}x/3=\,\mathrm{d}u\end{bmatrix}$$

$$=-\sqrt{5-4x-x^2}-3\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=-\sqrt{5-4x-x^2}-3\arcsin u+C$$

$$=-\sqrt{5-4x-x^2}-3\arcsin\frac{x-2}{3}+C.$$

Пример 1.6. Израчунати $I=\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$.

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{2x-2/3}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\left(\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x-\frac{5}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}}\right)=\begin{bmatrix}x^2+x=t,\\(2x+1)\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}-\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1/2)^2-1/4}}=\begin{bmatrix}x+1/2=u,\\ \mathrm{d}x=\,\mathrm{d}u\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2}-\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1/4}}$$

$$=3\sqrt{x^2+x}-\frac{5}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-1/4}|+C=3\sqrt{x^2+x}-\frac{5}{2}\ln|x+1/2+\sqrt{x^2+x}|+C$$

1.3 Парцијална интеграција

Парцијална интеграција директно следи из правила за извод производа.

Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције. На основу оравила за извод производа је

$$\mathrm{d}(uv)=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u,\quad \text{tj.}\quad u\,\mathrm{d}v=\,\mathrm{d}(uv)-v\,\mathrm{d}u,$$

одкале интеграцијом у односу на x добијамо

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u,$$

што је формула за парцијалну интеграцију. Приликом примене ове формуле, важно је одабрати функције u и v на прави начин.

Примера ради, за интеграл $\int P_n(x)f(ax)\,\mathrm{d}x$, где је $f(ax)\in\{e^{ax},\sin(ax),\cos(ax)\}$ и $P_n(x)$ полином степена n, бира се $P_n(x)=u, f(ax)\,\mathrm{d}x=\,\mathrm{d}v$.

Пример 1.7. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}(x+1) + C;$

б) $\displaystyle\int x^3\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^3, & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^3\sin 2x - \frac{3}{2}\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \begin{bmatrix} u = x^2, & \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^3\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x\right)$

$\displaystyle = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^3\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^3\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^3\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C = \frac{2x^3 - 3x}{4}\sin 2x + \frac{6x^2-3}{8}\cos 2x + C;$

в) $\displaystyle\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$

$\displaystyle = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

Пример 1.8. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x, & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x, & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C;$

б) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(x^2+1), & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x/(x^2+1), & v = x \end{bmatrix} = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1) - 2\int \mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$

$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C;$

в) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/\sqrt{1-x^2}, & v = x \end{bmatrix} = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1-x^2 = t, \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$

$\displaystyle = x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$

г) $\displaystyle\int x^2\arcsin 2x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \arcsin 2x, & \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x/\sqrt{1-4x^2}, & v = x^3/3 \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{2}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

$= \left[x^3 = -x(-4x^2)/4 = -x(1-4x^2-1)/4 = -x(1-4x^2)/4 + x/4\right]$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{2}{3}\int \frac{-x(1-4x^2)/4 + x/4}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x + \frac{1}{6}\int x\sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1-4x^2 = t, \\ -8x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{1}{48}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{48}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{1}{48}\frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{48}\frac{t^{1/2}}{1/2} + C$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{1}{72}\sqrt{(1-4x^2)^3} + \frac{1}{24}\sqrt{1-4x^2} + C$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x + \frac{1}{72}\sqrt{1-4x^2}\left(-1+4x^2+3\right) + C$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x + \frac{1}{36}\sqrt{1-4x^2}\left(1+2x^2\right) + C,$

д) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}, & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1}, & v = x^2/2 \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{1}{4}\int\frac{2x^2+2x+1-2x-1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{1}{4}\int\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\ln(2x^2+2x+1) + C.$$

Пример 1.9. Израчунати:

$$I_1 = \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = e^{ax}, & \mathrm{d}v = \sin bx\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = ae^{ax}\,\mathrm{d}x, & v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{bmatrix} = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{ax}, & \mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = ae^{ax}\,\mathrm{d}x, & v = \dfrac{1}{b}\sin bx \end{bmatrix} = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}I\right),$$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I_1 = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C, \quad \text{тј.} \quad I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C;$$

$$I_2 = \int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \sqrt{a^2-x^2}, & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = -x\,\mathrm{d}x/\sqrt{a^2-x^2}, & v = x \end{bmatrix} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow\ 2I_2 = x\sqrt{a^2-x^2} - a^2\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad \text{тј.} \quad I_2 = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$I_3 = \int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \sqrt{x^2+a^2}, & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x/\sqrt{x^2+a^2}, & v = x \end{bmatrix} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow 2I_3 = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C, \quad \text{тј.} \quad I_3 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

Пример 1.10. Израчунати

$$I = \int(2x-1)\ln x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x\ln(x-1), & \mathrm{d}v = (2x-1)\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \left(\dfrac{\ln(x-1)}{x} + \dfrac{\ln x}{x-1}\right)\mathrm{d}x, & v = x^2-x \end{bmatrix}$$

$$= (x^2-x)\ln x\ln(x-1) - \int\frac{(x^2-x)\ln(x-1)}{x}\,\mathrm{d}x - \int\frac{(x^2-x)\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= (x^2-x)\ln x\ln(x-1) - \int(x-1)\ln(x-1)\,\mathrm{d}x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x$$

Даље је $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x, & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x, & v = x^2/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. Дакле,

$$I = (x^2-x)\ln x\ln(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\ln(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

1.4 Интеграција рационалних функција

Рационална функција је функција облика $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где су P и Q полиноми и $Q(x) \neq 0$.

Посматрајмо интеграл рационалне функције $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

• Ако степен полином P није мањи од степена полинома Q, треба поделити полиноме:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

• Даље користимо особину да се сваки полином (са реалним коефицијентима) може факторисати на производ линеарних и нерастављивих квадратних фактора:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_i)^{n_i}\cdot(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}\cdots(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{m_j} \quad (\alpha_k,\beta_k,\gamma_k \in \mathbb{R},\ n_k, m_k \in \mathbb{N}).$$

Тада се свака рационална функција $\frac{R(x)}{Q(x)}$, где је степен полинома $R(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ може на јединствен начин представити у облику збира елементарних рационалних функција, тј. функција облика

$$\frac{A_1}{x-\alpha_1},\quad \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2},\ldots,\quad \frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta_1x+\gamma_1},\quad \frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^2},\ldots$$

где су и имениоцу фактори из $(x-\alpha_k)^{n_k}$ и $(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{m_l}$ за $k=1,\ldots,i$ и $l=1,\ldots,j$.

Пример 1.11. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{3x}{(x-1)^2(2x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Раставимо подинтегралну функцију на збир елементарних рационалних функција:

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{(x-1)^2(2x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2x+1} \qquad / \cdot (x-1)^2(2x+1),\\
3x &= A(x-1)(2x+1) + B(2x+1) + C(x-1)^2\\
&= A(2x^2-x-1) + B(2x+1) + C(x^2-2x+1)\\
&= (2A+C)x^2 + (-A+2B-2C)x - A + B + C.
\end{aligned}$$

Изједначавањем коефецијената уз x^2, x и 1 на левој и десној страни добијамо систем $2A+C=0$, $-A+2B-2C=3$, $-A+B+C=0$, чије је решење $(A,B,C) = (\frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3})$. Дакле,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \begin{bmatrix} 1+2x = t\\ 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\\
&= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\ln|2x+1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.
\end{aligned}$$

Пример 1.12. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x^5+3x+1}{x^4-x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Дељењем одговарајућих полинома добијамо

$$\frac{x^5+3x+1}{x^4-x^3+x^2} = x+1+\frac{-x^2+3x+1}{x^4-x^3+x^2}.$$

Даље је

$$\begin{aligned}
\frac{-x^2+3x+1}{x^4-x^3+x^2} = \frac{-x^2+3x+1}{x^2(x^2-x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \qquad / \cdot x^2(x^2-x+1),\\
-x^2+3x+1 &= Ax(x^2-x+1) + B(x^2-x+1) + (Cx+D)x^2\\
&= A(x^3-x^2+x) + B(x^2-x+1) + Cx^3 + Dx^2\\
&= (A+C)x^3 + (-A+B+D)x^2 + (A-B)x + B,
\end{aligned}$$

одкале добијамо систем $A+C=0$, $-A+B+D=-1$, $A-B=3$, $B=1$, чије је решење $(A,B,C,D) = (4,1,-4,2)$. Следи да је полазни интеграл

$$\begin{aligned}
I &= \int(x+1)\,\mathrm{d}x + 4\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int\frac{-4x^2+2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x^2-x+1 = t\\ 2x-1\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{bmatrix}\\
&= \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln(x^2-x+1) + C.
\end{aligned}$$

Пример 1.13. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Овде је

$$\frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2} \quad / \cdot (x+1)(x^2+2)^2,$$

$$\begin{aligned}
x-2 &= A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+2) + (Dx+E)(x+1) \\
&= A(x^4+4x^2+4) + (Bx+C)(x^3+x^2+2x+2) + Dx^2 + Dx + Ex + 1 \\
&= (A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (4A+2B+C+D)x^2 + (2B+2C+D+E)x + 4A + 2C + E,
\end{aligned}$$

одакле добијамо систем $A+B=0$, $B+C=0$, $4A+2B+C+D=0$, $2B+2C+D+E=1$, $4A+2C+E=-2$, чије је решење $(A,B,C,D,E) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Дакле,

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+2} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x^2+2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\
&= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(x^2+1)} + C.
\end{aligned}$$

Пример 1.14. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^4+1}$.

Да бисмо факторисали именилац, допуњујемо га до потпуног квадрата:

$$4x^4+1 = (2x^2+1)^2 - 4x^2 = (2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1).$$

Сада је

$$\frac{1}{4x^4+1} = \frac{Ax+B}{2x^2+2x+1} + \frac{Cx+D}{2x^2-2x+1}.$$

Решавањем одговарајућег система налазимо да је $A = B = D = \frac{1}{2}$ и $C = -\frac{1}{2}$, одакле је

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{4x+2+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \frac{4x-2-2}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(2x^2+2x+1)}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1/2} - \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1/2} \\
&= \frac{1}{8}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1/2)^2+1/4} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+1/4} \\
&= \frac{1}{8}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2x+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2x-1) + C.
\end{aligned}$$

Пример 1.15. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

Пођимо од интеграла $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ и на њега применимо парцијалну интеграцију:

$$I_1 = \begin{bmatrix} u = 1/(x^2+a^2), & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = -2x/(x^2+a^2)^2\,\mathrm{d}x, & v = x \end{bmatrix} = \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+a^2} + 2I_1 - 2a^2 I,$$

па је

$$I = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + I_1\right) = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{x^2+a^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C.$$

1.5 Експоненцијални и тригонометријски интеграли

Нека је $R(x)$ рационална функција.

• Интеграл $\int R(e^x)\,\mathrm{d}x$ се сменом $e^x = t$ своди на интеграл рационалне функције.

Пример 1.16. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x/2}}$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x/2}} \cdot \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}} = \int \frac{e^{x/2}}{e^{3x/2}+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} e^{x/2} = t \\ e^{x/2}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}.$$

Даље је
$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}, \quad \text{одакле се добија} \quad (A,B,C) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Дакле,
$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{2}{3}\int \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{3}\int \frac{2t-1-3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{3}\ln(t^2-t+1) + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{2}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{3}\ln(t^2-t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{3}\ln(e^{x/2}+1) - \frac{1}{3}\ln(e^x - e^{x/2}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2e^{x/2}-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

• Интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ се сменом $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$ (*универзалном тригонометријском сменом*) своди на интеграл рационалне функције. Тада је

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример 1.17. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3-2\sin x}$.

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t, \ \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \end{bmatrix} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t/(1+t^2)}{3-2\cdot 2t/(1+t^2)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{3+3t^2-4t} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4t/3+1} \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-2/3)^2+5/9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\,\frac{3t-2}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\,\frac{3\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-2}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

• Интеграли типа $\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$ и $\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$ се редом сменама $\sin x = t$ и $\cos x = t$ своде на интеграле рационалне функције.

Пример 1.18. Израчунати $I = \displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int (t^2-t^4)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Пример 1.19. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}.$$

Даље је
$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}, \quad \text{тј.} \quad 1 = A(t+1) + B(t-1).$$

За $t = 1$ добијамо $A = \frac{1}{2}$, а за $t = -1$ је $B = -\frac{1}{2}$. Дакле,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\sqrt{\frac{\cos t-1}{\cos t+1}} + C = \ln\sqrt{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} + C = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 1.20. Израчунати $I = \int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = \sin x/\cos^2 x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = 1/\cos x \end{bmatrix} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$$
$$= \frac{x}{\cos x} - \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C.$$

• Интеграли типа $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ и $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ се решавају применом одговарајућих адиционих формула:

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right),$$
$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right),$$
$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right).$$

Пример 1.21. Израчунати $I = \int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{6} + \cos\frac{x}{6}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\sin\frac{5x}{6} + \frac{1}{2}\cdot 6\sin\frac{x}{6} + C = \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6} + C.$$

1.6 Ирационални интеграли

Тригонометријске и хиперболичке смене

- Интеграли типа $R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$ се решавају сменом $x = a\sin t$.
- Интеграли типа $R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$ се решавају сменом $x = a\,\mathrm{sh}\,t$ или $x = a\mathrm{tg}\,t$.
- Интеграли типа $R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$ се решавају сменом $x = a\,\mathrm{ch}\,t$.

Лако се проверава да за хиперболичке функције $\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ важи

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \qquad (\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x, \quad (\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x,$$
$$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x, \quad \mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x, \quad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2}, \quad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{2},$$

а за њихове инверзне $\mathrm{arsh}\,x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ и $\mathrm{arch}\,x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Пример 1.22. Израчунати $I = \int\sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \begin{bmatrix} 2x = \sin t, \ -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2, \\ 2\,\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\sin 2t + C = \frac{t}{4} + \frac{1}{4}\sin t\cos t + C = \frac{1}{4}\arcsin 2x + \frac{1}{4}\sin\arcsin 2x\sqrt{1-\sin^2\arcsin 2x} + C$$
$$= \frac{1}{4}\arcsin 2x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C.$$

Пример 1.23. Израчунати $I = \int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

$$I = \begin{bmatrix} x = a\,\mathrm{sh}\,t, \\ \mathrm{d}x = a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = a\int\frac{\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2(1+\mathrm{sh}^2 t)}} = \int\frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t = t + C = \mathrm{arsh}\,x/a + C$$
$$= \ln\left(x/a + \sqrt{(x/a)^2+1}\right) + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C_1 \quad (C_1 = C - \ln a).$$

Пример 1.24. Израчунати $I=\int\sqrt{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.

Допуном до потпуног квадрата добијамо

$$I=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{ch}t,\\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\sqrt{\frac{5}{4}\operatorname{ch}^2t-\frac{5}{4}}\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t=\frac{5}{4}\int\operatorname{sh}^2t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{5}{4}\int\frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{8}\left(\frac{\operatorname{sh}2t}{2}-t\right)=\frac{5}{8}(\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-t)=\frac{5}{8}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1}-\operatorname{arch}\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x-1}-\frac{5}{8}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x-1})+C_1.$$

Пример 1.25. Израчунати $I=\int x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

$$I=\begin{bmatrix} x=\operatorname{sh}t,\ \sqrt{1+x^2}=\operatorname{ch}t\\ \mathrm{d}x=a\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\int\operatorname{sh}^2t\operatorname{ch}^2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\operatorname{sh}^2 2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int(\operatorname{ch}4t-1)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sh}4t}{4}-t\right)+C=\frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2t}{2}-t\right)+C=\frac{1}{8}\left(\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t(1+2\operatorname{sh}^2t)-t\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\left(x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2)-\operatorname{arsh}x\right)+C=\frac{1}{8}\left(x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2)-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)+C.$$

Метод Остроградског

Овом методом решавамо интеграле облика $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ тако што их напишемо на следећи начин:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где је $P_n(x)$ је полином степена n, $Q_{n-1}(x)$ полином степена $n-1$ са неодређеним коефицијентима и λ константа. Коефицијенти полинома $Q_{n-1}(x)$ и λ се налазе диференцирањем претходне једнакости.

Пример 1.26. Израчунати $I=\int\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x=(Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

одакле диференцирањем добијамо

$$\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}=A\sqrt{x^2+x+1}+(Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Множењем претходне једнакости са $2\sqrt{x^2+x+1}$ добијамо

$2(x^2+x+2)=2A(x^2+x+1)+(Ax+B)(2x+1)+2\lambda$, тј. $2x^2+2x+4=4Ax^2+(3A+2B)x+(2A+B+2\lambda)$,

одакле изједначавањем коефицијената добијамо систем $4A=2$, $3A+2B=2$, $2A+B+2\lambda=4$, чије је решење $(A,B,C)=(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8})$. Дакле,

$$I=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{11}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{11}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{11}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}|+C.$$

Интеграли облика $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n\in\mathbb{N})$ се сменом $x-\alpha=1/t$ своде на претходни облик.

Интеграл диференцијалног бинома

Интеграли облика $\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, где су $a,b\in\mathbb{R}$ и $m,n,p\in\mathbb{Q}$ се своди на интеграл рационалне функције ако је бар један од бројева $p, \frac{m+1}{n}, p+\frac{m+1}{n}$ цео. У свим осталим случајевим интеграл диференцијалног бинома се не може изразити помоћу елементарних функција.

Ако је $p\in\mathbb{Z}$ и $p>0$, бином $(a+bx^n)^p$ треба развити по биномном образцу. Размотримо наредне случајеве.

(1°) Када је $p\in\mathbb{Z}$ и $p<0$ уводи се смена $x=t^k$, где је k најмањи заједнички садржалац за имениоце разломака m и n.

(2°) Када је $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ уводи се смена $a+bx^n=t^r$, где је r именилац разломка p.

(3°) Када је $p+\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ уводи се смена $ax^{-n}+b=t^r$, где је r поново именилац разломка p.

Пример 1.27. Свести дате интеграле на интеграле рационалних функција:

а) $$\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} x=t^6, \\ \mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\int t^3(1+2t^2)^{-3}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t=6\int\frac{t^8\,\mathrm{d}t}{(1+2t^2)^3}.$$

б) $$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,\ x=(t^3-1)^4 \\ \mathrm{d}x=12t^2(t^3-1)^3\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=12\int(t^6-t^3)\,\mathrm{d}t.$$

в) $$\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}x^{-4}+1=t^2,\ t=(x^{-4}+1)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathrm{d}t=-2x^{-5}(x^{-4}+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2\,\mathrm{d}t.$$

Ојлерове смене

Посматрамо интеграле облика $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$.

(1°) Ако је $a>0$, уводи су смена
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\mp x\sqrt{a}.$$

Пример 1.28. Израчунати $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

$$\begin{aligned}I&=\begin{bmatrix}\sqrt{x^2+1}=t-x, \\ x=\dfrac{t^2-1}{2t},\ \mathrm{d}x=\dfrac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln t-\frac{1}{4t^2}+C\\ &=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(x-\sqrt{x^2+1})^2}+C\\ &=\frac{1}{2}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})-x^2+\sqrt{1+x^2}\right)+C_1.\end{aligned}$$

(2°) Ако је $c>0$, уводи су смена
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\mp\sqrt{c}.$$

Пример 1.29. Израчунати $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

$$\begin{aligned}I&=\begin{bmatrix}\sqrt{1+x-x^2}=tx-1, \\ x=\dfrac{1+2t}{t^2+1},\ \mathrm{d}x=-\dfrac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=-2\int\frac{dt}{1+(t+1)^2}=-2\mathrm{arctg}\,(t+1)+C\\ &=-2\mathrm{arctg}\,\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.\end{aligned}$$

(3°) Ако су корени квадратног тринома ax^2+bx+c реални, уводи се смена
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t.$$

Пример 1.30. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$.

$$I = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+2x} = xt, & \\ x = \dfrac{2}{t^2-1}, & \mathrm{d}x = -\dfrac{4tdt}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}dt = \frac{3}{2t} - \frac{1}{2}t + C = \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}} + C.$$

Напомена: Случајеви $a > 0$ и $c > 0$ своде се један на други сменом $x = 1/t$.

1.7 Рекурентне формуле

Пример 1.31. Израчунати $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 2)$.

$$I_n = \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x, & \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,\mathrm{d}x, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Дакле,
$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x, \qquad I_1 = -\cos x + C, \quad I_0 = x + C.$$

Пример 1.32. Израчунати $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \geqslant 2)$.

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x/(x^2+a^2)^n, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = -1/(2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right).$$

Дакле,
$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}, \qquad I_1 = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C, \quad I_0 = x + C.$$

Рада Мутавџић Ђукић