Интеграли који се директно своде на табличне

Овај материјал се директно надовезује на садржај вежби и предавања (то значи да прво треба проучити вежбе и предавања).

1. Решити неодређени интеграл:
$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}.$$
Решење: Ако се уведе линеарна смена:
$$2x - 3 = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow \,dx = \frac{dt}{2}$$
интеграл се своди на таблични:
$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \int \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{t} + c = \sqrt{2x-3} + c.$$

2. Решити неодређени интеграл:
$$I = \int \cos^2 x\,dx.$$
Решење: Ако искористимо $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, имамо
$$I = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c.$$
Коначно се добија:
$$I = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c. \tag{1}$$

3. Решити неодређени интеграл:
$$I = \int \sin^4 x\,dx. \tag{2}$$
Решење: На основу $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$,
$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx.\end{aligned}$$
Уведимо смену:
$$2x = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$
и после смењивања и примене резултата (1) добија се:
$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos t\, sdt + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\int \cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right).\end{aligned}$$
После враћања уведене смене коначно се добија:
$$I = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c. \tag{3}$$
Напоменимо да ће решавање интеграла $\displaystyle\int \sin^n x\,dx$ и $\displaystyle\int \cos^n x\,dx$ бити разматрано у на бази примене парцијалне интеграције.

4. Извести $\int a^x\,dx$ користећи $\int e^x\,dx$.

Решење: Како је $a \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ то је могуће написати $a^x = e^{x\ln a}$ одакле је:

$$I = \int a^x\,dx = \int e^{x\cdot\ln a}\,dx$$

Смењујући:

$$x\cdot\ln a = t \Rightarrow \ln a\cdot\,dx =\,dt \Rightarrow\,dx = \frac{dt}{\ln a},$$

добијамо:

$$I = \frac{1}{\ln a}\int e^t\,dt = \frac{1}{\ln a}e^t + c = \frac{1}{\ln a}e^{x\cdot\ln a} + c = \frac{1}{\ln a}a^x + c.$$

5. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int x\cdot e^{1-\frac{x^2}{5}}\,dx.$$

Решење: Сменом

$$1-\frac{x^2}{5} = t \Rightarrow -\frac{2x}{5}\,dx =\,dt \Rightarrow x\,dx = -\frac{5}{2}\,dt$$

дати интеграл се своди на:

$$I = -\frac{5}{2}\int e^t\,dt = -\frac{5}{2}e^t + c = -\frac{5}{2}e^{1-\frac{x^2}{5}} + c.$$

6. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx.$$

Решење: Сменом $\sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$ (**овај пример добро запамтити**), дати интеграл се своди на табличне интеграле:

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cos x\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = \int t^{-4}\,dt - \int t^{-2}\,dt = -\frac{t^{-3}}{3} + t^{-1} + c$$

Враћањем смене, коначно се добија:

$$I = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c.$$

7. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x-2}\,dx.$$

Решење: Како је

$$d(x^2-x-2) = (2x-1)\,dx,$$

увоењем смене $u = x^2-x-2 = u \Rightarrow\,du = (2x-1)\,dx$ добијамо $\left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\,du$, па се дати интеграл своди на

$$\int \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-2\right| + c.$$

Овакав приступ се испоставља као користан и у неким компликованијим примерима интеграције рационалне функције.

А. Пејчев