Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

22.09.2014.

Rešenja zadataka sa pismenog dela ispita iz predmeta Matematika 1, oktobar 2014. godine

1. **Prvi način:**

Sistem rešimo koristeći Gausov postupak. Izborom prvog markera

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a \\
(a+1)\,x & - & ay & + & (3a+1)\,z & = & a+2 \\
x & & & + & az & = & 3-2a
\end{array}$$

dobijamo sledeći ekvivalentni sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a \\
(2a^2+1)\,x & & & + & (-a^2+3a+1)\,z & = & -a^2+2a+2 \\
\boxed{x} & & & + & az & = & 3-2a
\end{array}$$

Izborom drugog markera dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a \\
 & & & & (-2a^3-a^2+2a+1)\,z & = & 4a^3-7a^2+4a-1 \\
\boxed{x} & & & + & az & = & 3-2a
\end{array} \tag{1}$$

Sledi da je:

$$z = \frac{4a^3-7a^2+4a-1}{-2a^3-a^2+2a+1} \Rightarrow z = \frac{(a-1)\,(4a^2-3a+1)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{2}$$

Slično je:

$$x = (3-2a) - az \Rightarrow x = \frac{(a-1)\,(a-3)\,(3a+1)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{3}$$

i

$$y = 1-a+az-(2a-1)\,x \Rightarrow y = \frac{(a-1)\,(17a^2-3a-4)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{4}$$

Konačno ako $a \notin \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$ sistem ima jedinstveno rešenje. Koristeći mogućnost skraćivanja podizraza $(1-a)$ u (2), (3), (4) rešenje možemo napisati:

$$\mathcal{R} = \left\{ \left(\frac{(3-a)\,(3a+1)}{(2a+1)\,(1+a)}, \frac{-17a^2+3a+4}{(2a+1)\,(1+a)}, \frac{-4a^2+3a-1}{(2a+1)\,(1+a)} \right) \middle| a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\right\} \right\}$$

Ukoliko je $a \in \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$ sistem (1) je protivurečan jer je slobodni član njegove druge jednačine različit od nule. Sledi:

$$\mathcal{R} = \emptyset \text{ za } a \in \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$$

Ukoliko je $a = 1$ sistem (1) postaje:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & \boxed{y} & - & z & = & 0 \\ & & & & 0z & = & 0 \\ \boxed{x} & & & + & z & = & 1 \end{array} \tag{5}$$

Ako je $z = \alpha \in \mathbb{R}$ tada je $x = 1 - \alpha$ i $y = 2\alpha - 1$ odakle je:

$$\mathcal{R} = \left\{ (1-\alpha, 2\alpha - 1, \alpha) \,\middle|\, a = 1, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Drugi način:

Ukoliko dati sistem rešavamo uz pomoć Kramerovog pravila, dobijamo da su odgovarajuće determinante jednake

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & -a \\ a+1 & -a & 3a+1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -2a^3 - a^2 + 2a + 1, \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 1-a & 1 & -a \\ a+2 & -a & 3a+1 \\ 3-2a & 0 & a \end{vmatrix} = 3a^3 - 11a^2 + 5a + 3, \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1-a & -a \\ a+1 & a+2 & 3a+1 \\ 1 & 3-2a & a \end{vmatrix} = 17a^3 - 20a^2 - a + 4, \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & 1-a \\ a+1 & -a & a+2 \\ 1 & 0 & 3-2a \end{vmatrix} = 4a^3 - 7a^2 + 4a - 1.
\end{aligned}$$

Glavna determinanta Δ je očito jednaka 0 za $a = 1$ (kao i sve ostale), te se pri njenoj faktorizaciji može izvući $(a-1)$. Nalazimo $\Delta = (a-1)\left(-2a^2 - 3a - 1\right) = (1-a)\left(2a^2 + 3a + 1\right)$. Izraz u drugoj zagradi je jednak 0 za $a = -1$, tako da se dalje može izvući $(a+1)$. Konačno,

$$\Delta = (1-a)(a+1)(2a+1).$$

FAKTORIZACIJU OSTALIH DETERMINANTI NEMA POTREBE SPROVODITI NA

OVAJ NAČIN (mole se studenti da ovo zapamte za ubuduće), jedino što nam je bitno jeste da li je neka od njih deljiva sa $a-1$, $a+1$ ili $2a+1$, $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$ - nije osim sa $(a-1)$. Za $a \neq \pm 1, -\dfrac{1}{2}$ nalazimo da sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x,y,z)=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)=\left(\frac{-3a^2+8a+3}{(2a+1)(a+1)},\frac{-17a^2+3a+4}{(2a+1)(a+1)},\frac{-4a^2+3a-1}{(2a+1)(a+1)}\right).$$

Za $a=1$, dati sistem se svodi na

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \cdot(-2),\ \cdot(-1)\\ +\\ +\end{array}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 6 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 6 & 3\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \cdot(-3)\\ +\end{array}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0,\end{bmatrix}\end{aligned}$$

odakle vidimo da u ovom slučaju sistem ima beskonačno mnogo rešenja

$$(x,y,z)=(1-t,2t-1,t)$$

(zbog treće jednačine se uzme $z=t$, onda iz druge sledi $y=2t-1$ i na kraju iz prve $x=1-t$). Za $a=-1$ i $a=-0.5$ se analognim postupkom dobija da je dati sistem protivrečan.

2. Iz jednačine krive se dobija da za tangens dvostrukog ugla za koji treba rotirati koordinatni sistem treba da važi:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}},$$

odnosno da $\operatorname{tg} 2\alpha$ nije definisan, što znači da je $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ i $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ (uveli smo standardne oznake za odgovarajuće koeficijente $a_{11}=1$, $2a_{12}=1 \Rightarrow a_{12}=\dfrac{1}{2}$, $a_{22}=1$, $2a_{13}=2 \Rightarrow a_{13}=1$, $2a_{23}=-4 \Rightarrow a_{23}=-2$, $a_{33}=-3$). Sledi da su formule rotacije:

$$\begin{aligned}x &= \cos\alpha\cdot X - \sin\alpha\cdot Y\\ y &= \sin\alpha\cdot X + \cos\alpha\cdot Y\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\end{aligned}$$

koje kad unesemo u jednačinu krive - dobijamo:

$$\begin{aligned}
& x^2+xy+y^2+2x-4y-3=0 \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2}(X-Y)^2+\frac{1}{2}\left(X^2-Y^2\right)+\frac{1}{2}(X+Y)^2+\sqrt{2}(X-Y)-2\sqrt{2}(X+Y)-3=0 \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{2}X^2-XY+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}X^2+XY+\frac{1}{2}Y^2-\sqrt{2}X-3\sqrt{2}Y-3=0 \\
\Rightarrow\ & \frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2-\sqrt{2}X-3\sqrt{2}Y-3=0 \\
\Rightarrow\ & 3X^2+Y^2-2\sqrt{2}X-6\sqrt{2}Y-6=0 \\
\Rightarrow\ & 3\left(X^2-2\frac{\sqrt{2}}{3}X+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\right)+\left(Y^2-2\cdot 3\sqrt{2}Y+\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2\right)-6=0 \\
\Rightarrow\ & 3\left(X-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\frac{2}{3}+\left(Y-3\sqrt{2}\right)^2-18-6=0 \\
\Rightarrow\ & \frac{\left(X-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{\frac{74}{9}}+\frac{\left(Y-3\sqrt{2}\right)^2}{\frac{74}{3}}=1,
\end{aligned}$$

što znači da je u pitanju elipsa sa poluosama $\sqrt{\frac{74}{9}}$ i $\sqrt{\frac{74}{3}}$.

2*. Kao alternativa za 2. zadatak ponudjen je zadatak sledeće formulacije (što ubuduće neće biti tolerisano, jer Krive 2. reda spadaju u oblast koja se redovno prelazi na nastavi): Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $A(1,2,1)$ i seče pravu

$$p: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}.$$

Ovaj zadatak se nalazi kompletno rešen (samo su zamenjena mesta x i z koordinatama) u materijalu vezanom za oblast Tačka, prava, ravan, koji je asistent Dušan Djukić (izmedju ostalog) ostavio na sajtu Katedre za matematiku tokom 1. semestra školske 2013/2014. godine i koji je ponovo tokom junskog ispitnog roka ostavljen na novom sajtu Mašinskog fakulteta, a sada je okačen opet odmah nakon što su okačena ova rešenja. Zadatak je u odgovarajućem materijalu označen rednim brojem 2.

3. Vrednost date funkcije je uvek veća od ili jednaka 0 (koren je uvek nenegativan). Kako vrednost koja je pod korenom mora uvek biti nenegativna, mora da važi $\frac{x^3+2}{x}\geq 0$, što je ekvivalentno sa $x^3+2\geq 0, x>0$ ili $x^3+2\leq 0, x<0$, odakle dobijamo

$$D_f=\left(-\infty,-\sqrt[3]{2}\right]\cup(0,+\infty)$$

Jedini kandidat za vertikalnu asimptotu je tačka $x_0=0$ (i to samo s desne strane s obzirom na domen). Kako je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x^3+2}{x}} \sim \frac{2}{0} \sim +\infty,$$

zaključujemo da u nuli data funkcija ima vertikalnu asimptotu (zapravo, $y-$osa). Kako je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, horizontalnih asimptota nema, a za koeficijente eventualnlih kosih asimptota mora da važi

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|\,x\,| \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x^3}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{sgn} x \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} = \pm 1$$

Da bi u "$+\infty$"postojala kosa asimptota, limes

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\mathrm{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} - 1 \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

mora biti konačan. Izraz je oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i može se primeniti pravilo Lopitala:

$$l_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sgn} x \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} \cdot \frac{-6}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sgn} x \frac{3}{x^2 \sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} = 0$$

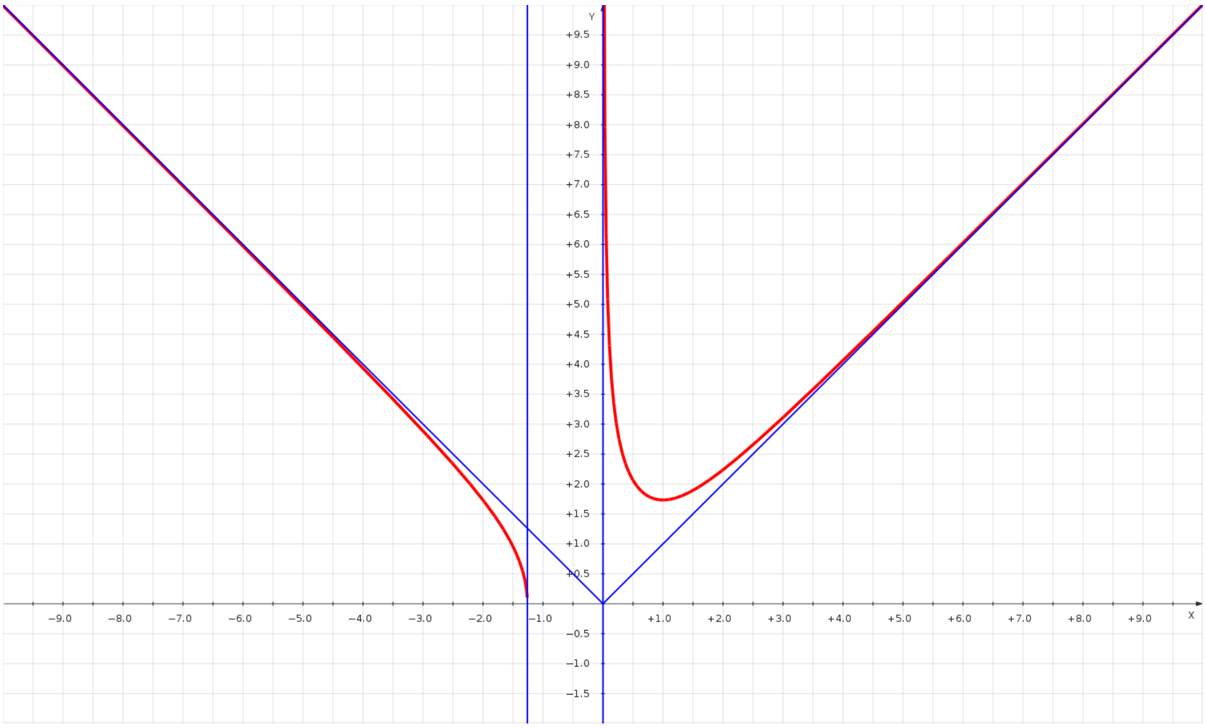
Dakle, u ovom slučaju dobijamo kosu asimptotu $y = x$. Da bi u "$-\infty$"postojala kosa asimptota, limes

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \left(\mathrm{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} + 1 \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} + 1}{\frac{1}{x}}$$

mora biti konačan. Izraz je opet oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i može se primeniti pravilo Lopitala:

$$l_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\mathrm{sgn} x \sqrt{1+\frac{2}{x^3}} + 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{sgn} x \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} \cdot \frac{-6}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{sgn} x \frac{3}{x^2 \sqrt{1+\frac{2}{x^3}}} = 0$$

Dakle, u ovom slučaju dobijamo kosu asimptotu $y = -x$.



4. **Prvi način:**

Tejlorov polinom stepena 3 za $a = 1$ oblika je:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-1) + \frac{f''(a)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-1)^3 \tag{6}$$

Jednostavno se računaju potrebne vrednosti:

$$f(1) = \ln\left(1^2 - 2 \cdot 1 + 2\right) = \ln 1 = 0 \tag{7}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \cdot (2x - 2) \Rightarrow f'(1) = 0 \tag{8}$$

jer je podizraz $(2x - 2)$ za $x = 1$ jednak 0.

$$f''(x) = \frac{-1}{(x^2 - 2x + 2)^2} \cdot (2x - 2)^2 + \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \cdot 2 \Rightarrow f''(1) = 2 \tag{9}$$

Drugi izvod je računat kao izvod proizvoda. Prvi sabirak za $x = 1$ je odmah jednak 0, dok je drugi sabirak jednak 2. Slično se računa i treći izvod:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x^2 - 2x + 2)^3} \cdot (2x - 2)^3 + \frac{-1}{(x^2 - 2x + 2)^2} \cdot 2(2x - 2) + \frac{-2}{(x^2 - 2x + 2)^2} \cdot (2x - 2)$$

Iz pretodnog sledi da je:

$$f^{(3)}(1) = 0 \tag{10}$$

Konačno kada se (7), (8), (9), (10) unese u (6) dobija se:

$$f(x) \approx \frac{2}{2!}(x-1)^2 \Rightarrow f(x) \approx (x-1)^2$$

Drugi način: Ako iskoristimo da za svaki prirodan broj n Maklorenov polinom n-tog stepena funkcije $\ln(1+t)$ glasi

$$\ln(1+t) = t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n}$$

(ovo je praktično primenljvo kad je vrednost t blizu 0) i $x^2 - 2x + 2$ zapišemo kao $(x-1)^2 + 1$, pri čemu $t = (x-1)^2$ tačno jeste blizu 0 kad je x blizu 1, dobijamo da je već odgovarajući Maklorenov polinom 2-og stepena po t oblika

$$\ln\left(1 + (x-1)^2\right) = (x-1)^2 + \frac{\left((x-1)^2\right)^2}{2} = (x-1)^2 + \frac{(x-1)^4}{2},$$

tj. da sadrži $(x-1)^4$. Kako nas interesuje Maklorenov polinom po x koji sadrži stepene ne preko $(x-1)^3$, treba nam samo deo $(x-1)^2$.

prof. dr Slobodan Radojević
doc. dr Aleksandar Pejčev