Интеграли рационалних функција

Овај материјал се директно надовезује на садржај вежби и предавања (то значи да прво треба проучити вежбе и предавања).

1. Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{3x-6}{x^2-3x+4}\,dx.$$

Решење:

$$I = 3\cdot\int \frac{x-2}{x^2-3x+4}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{2x-4}{x^2-3x+4}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{2x-3-1}{x^2-3x+4}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\left(I_1 - I_2\right).$$

Значи, решење интеграла I се добија од решења разлике интеграла I_1 и I_2. Ови интеграли су једнаки:

$$I_1 = \int \frac{2x-3}{x^2-3x+4}\,dx, \quad I_2 = \int \frac{dx}{x^2-3x+4}.$$

Поступак је јасан, али се можда не види одмах разлог његове примене. Разлог је стварање извода имениоца у бројиоцу. То показује анализа решења интеграла I_1:

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+4} = \int \mathrm{d}\left(\ln\left|x^2-3x+4\right|\right) = \ln\left|x^2-3x+4\right| + c.$$

Интеграл I_2 своди се на један од табличних интеграла. Свођењем до потпуног квадрата интеграл I_2 постаје:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2-3x+4} = \int \frac{dx}{x^2 - 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2},$$

односно:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2 + 1}.$$

После увођења смене $\dfrac{x-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{\sqrt{7}}{2}} = t \Rightarrow, dx = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{dt}$ (ово је заправо извођење интеграла $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$, иако смо га већ прогласили за таблични) интеграл I_2 једнак је:

$$I_2 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\int \frac{\mathrm{dt}}{t^2+1} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}\cdot arctg t + c_2.$$

После враћања смене, решење интеграла I_2 једнако је:

$$I_2 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}\cdot arctg\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c_2 = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot arctg\left(\frac{2x-3}{\sqrt{7}}\right) + c_2.$$

Коначно, решења интеграла I, једнако је:

$$I = \frac{3}{2}\cdot\left(I_1 - I_2\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(\ln\left|x^2-3x+4\right| - \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot arctg\left(\frac{2x-3}{\sqrt{7}}\right)\right) + c.$$

Решавање уз помоћ уобичајене смене која се уводи кад имамо квадратни трином би текло на следећи начин $x = t + \dfrac{3}{2} \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{(3x-6)\,dx}{x^2-3x+4} = \frac{\left(3t-\frac{3}{2}\right)\,dt}{t^2+\frac{7}{4}} = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{7}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{7}{4}\right)}{t^2+\frac{7}{4}} - \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+\frac{7}{4}\right| - \frac{3}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-3x+4\right| - \frac{3}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c.$$

2. Решити неодређени интеграл:

$$I=\int\frac{dx}{x^4+2x^3-x^2+4x+12}.$$

Решење: За полином $\mathbb{P}(x)=x^4+2x^3-x^2+4x+12$, потенцијалне целобројне нуле, према Безуовом ставу, су целобројни делиоци слободног члана 12. Целобројни делиоци броја 12 су ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Једноставним рачуном налази се да је $\mathbb{P}(-2)=0$.

Полином $\mathbb{P}(x)$ дељив је полиномом $x-(-2)=x+2$, и после дељења добија се:

$$\mathbb{P}(x)=(x+2)\cdot(x^3-x+6).$$

Слично, слободни члан полинома x^3-x+6, дељив је са $x+2$, односно:

$$x^3-x+6=(x+2)\left(x^2-2x+3\right).$$

Полином подинтегралне функције који се налази у бројиоцу може се написати следећи начин:

$$\mathbb{P}(x)=(x+2)^2\,(x^2-2x+3),$$

уз напомену да x^2-2x+3 није растављиво јер дискриминанта одговарајуће квадратне једначине $2^2-4\cdot3=-8<0$ нема реалних нула. Подинтегралну функцију можемо раставити на просте разломке:

$$\frac{1}{x^4+2x^3-x^2+4x+12}\equiv\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3}.$$

Вредност интеграла I мое се добити и накнадним тражењем вредности за уведене константе A, B, C, D (посебно обратити пажњу на то шта радимо кад имамо квадрат линеарног члана, $x+2$ у овом случају):

$$I=\int\frac{A}{x+2}dx+\int\frac{B}{(x+2)^2}dx+\int\frac{Cx+D}{x^2-2x+3}dx=A\cdot\ln|x+2|-B\cdot\frac{1}{x+2}+J.$$

У интеграл J, ако уведимо (већ уобичајену) линеарну смену $x=t+1\Rightarrow dx=dt$, добија се:

$$J=\int\frac{C\,(t+1)+D}{(t+1)^2-2\,(t+1)+3}\,dt=\int\frac{Ct+C+D}{t^2+2}\,dt.$$

Раставом на два таблична интеграла добијамо реење за J:

$$\begin{aligned}
J &= C\int\frac{t}{t^2+2}\,dt+(C+D)\int\frac{1}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dt\\
&= C\cdot\frac{1}{2}\ln\left(t^2+2\right)+(C+D)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+c\\
&= C\cdot\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+3\right)+(C+D)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+c.
\end{aligned}$$

Константе A, B, C, D добијамо из идентитета растава на просте разломке:

$$\begin{aligned}
1 &= A\,(x+2)\left(x^2-2x+3\right)+B\left(x^2-2x+3\right)+(Cx+D)\,(x+2)^2\,,\\
1 &= A\left(x^3-x+6\right)+B\left(x^2-2x+3\right)+(Cx+D)\left(x^2-4x+4\right),\\
1 &= A(x^3-x+6)+B(x^2-2x+3)+\left(Cx^3+(D-4C)x^2+(4C-4D)x+4D\right),\\
1 &= (A+C)\,x^3+(B+D-4C)\,x^2+(-A-2B+4C-4D)\,x+6A+3B+4D,
\end{aligned}$$

односно из система једначина:

$$\begin{array}{rrrrll}
\boxed{A} & & +\ C & & =0 & \quad -6\\
 & B & -4C & +\ D & =0 & \\
-A & -2B & +4C & -4D & =0 & \quad +\\
6A & +3B & & +4D & =1 & \quad +
\end{array}$$

После прве трансформације систем је облика:

$$\begin{array}{rrrll}
\boxed{B} & -4C & +\ D & =0 & \quad +2 \quad -3\\
-2B & +5C & -4D & =0 & \quad +\\
3B & -6C & +4D & =1 & \quad +
\end{array}$$

После друге трансформације добијамо две једначине:

$$\begin{array}{rrll} \boxed{-3C} & -2D & = 0 & {}^{+2} \\ 6C & + \ D & = 1 & {}^{+} \end{array}$$

Како је $D = -\dfrac{1}{3}$, $C = \dfrac{2}{9}$, $B = \dfrac{11}{9}$ и $A = -\dfrac{2}{9}$, следи да је решење интеграла I:

$$I = -\frac{2}{9} \ln |x+2| - \frac{11}{9} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{9} \ln \left(x^2 - 2x + 3\right) - \frac{1}{9\sqrt{2}} arctg \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) + c.$$

А. Пејчев