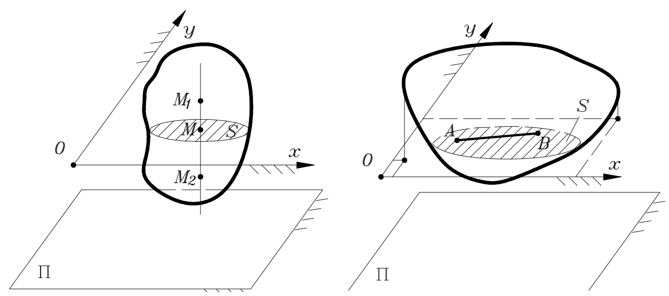
Ravno kretanje tela

Pod ravnim kretanjem tela podrazumeva se takvo kretanje tela kod koga se sve njegove tačke kreću samo u ravnima paralelnim nekoj nepokretnoj ravni.

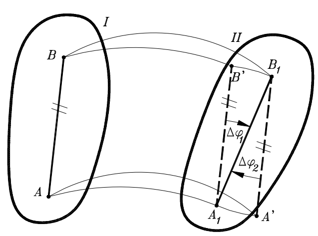


Presek S naziva se ravan presek ili samo presek. Kako taj presek ne mora da bude i najveći presek tela, odnosno postoje tačke tela čije ortogonalne projekcije ne sadrže presek S to se za razmatranje ravnog kretanja koristi ravna figura – ravan neograničenih dimenzija koje je stalno paralelna sa Π. Položaj ravne figure u ravni xOy biće jednoznačno određen položajem dveju proizvoljno izabranih tačaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. S obzirom da je rastojanje između ovih dveju tačaka nepromenljivo, između koordinata ovih tačaka postoji veza

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \overline{AB}^2 = const.$$

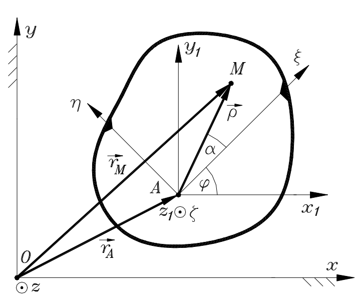
Telo koje vrši ravno kretanje ima tri stepena slobode kretanja.

Razlaganje ravnog kretanja na translatorno i obrtno



Promena položaja ravne figure može se ostvariti kombinacijom translatornog i obrtnog kretanja. Neka se posmatra kretanje ravne figure koja se u trenutku t nađe u položaju *I*. Za konačni interval vremena Δt figura se premesti u položaj *II*. Zapaža se da se taj položaj može dostići na više načina. Jedan je onaj kojim se novi položaj dostiže jednom translacijom kojom uočena duž iz položaja *AB* prelazi u položaj A_1B', a zatim obrtanjem za ugao $\Delta\varphi_1$ u položaj A_1B_1. Isti položaj može se dostići i na sledeći način: ravno kretanje $(AB \to A_1B_1) =$ translacija $(AB \to A'B_1) +$ rotacija $(A'B_1 \to A_1B_1)$.

Jednačine kretanja ravne figure



$$x_A = x_A(t), \qquad y_A = y_A(t), \qquad \varphi = \varphi(t)$$

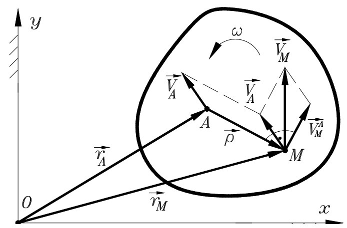
Ove jednačine nazivaju se jednačine kretanja ravne figure.

Određivanje kretanja proizvoljne tačke ravne figure

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho},$$
$$x_M = x_A + \rho\cos(\alpha + \varphi),$$
$$y_M = y_A + \rho\sin(\alpha + \varphi),$$
$$x_M = x_A + \xi_M\cos\varphi - \eta_M\sin\varphi,$$
$$y_M = y_A + \eta_M\cos\varphi + \xi_M\sin\varphi,$$

- jednačine kretanja proizvoljne tačke *M* ravne figure.

Određivanje brzine tačke tela pri ravnom kretanju razlaganjem kretanja



$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \qquad \varphi = \varphi(t),$$

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\rho}}.$$

$$\vec{\rho} = \rho\vec{\rho}_o, \qquad \dot{\vec{\rho}} = \rho\dot{\vec{\rho}}_o.$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \rho(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_o) = \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} = \vec{V}_M^A,$$

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_M^A = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

Dakle, brzina proizvoljne tačke M ravne figure jednaka je zbiru brzine proizvoljno izabranog pola translacije A i obrtne komponente brzine tačke M u odnosu na pol A.

Nezavisnost vektora ugaone brzine i ugaonog ubrzanja tela koje vrši ravno kretanje od izbora pola translacije

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \varepsilon_z\vec{k} = \ddot{\varphi}\,\vec{k} = \ddot{\varphi}\,\vec{v}$$

<u>Teorema</u>: *Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja tela koje vrši ravno kretanje ne zavise od izbora pola translacije.*

<u>Dokaz</u>: Neka je pretpostavljeno suprotno, odnosno da vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ i vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ zavise od izbora pola translacije. Tada je

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AB},$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \overrightarrow{BA},$$

$$(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \overrightarrow{AB} = 0.$$

Kako su vektori $\vec{\omega}_A$ i $\vec{\omega}_B$ upravni na ravnu figuru, odnosno na vektor $\overrightarrow{AB} \neq 0$, iz prethodne relacije sledi da mora biti ispunjeno

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}.$$

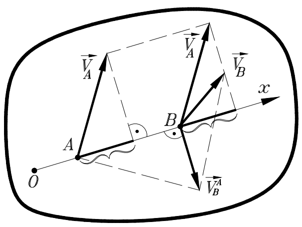
Diferenciranjem prethodne relacije dobija se

$$\vec{\varepsilon}_A = \vec{\varepsilon}_B = \vec{\varepsilon},$$

čime je teorema i dokazana.

Teorema o projekcijama vektora brzina tačaka ravne figure

<u>Teorema</u>: *Projekcije brzina tačaka figure koja vrši ravno kretanje, na osu koja prolazi kroz te tačke, međusobno su jednake.*



<u>Dokaz:</u> Neka su uočene tačke A i B ravne figure koje se nalaze na osi Ox, i neka je poznata brzina tačke A ($\vec{V}_A$), kao i intenzitet i smer ugaone brzine $\vec{\omega}$ ravne figure. Ako se tačka A usvoji za pol translacije, tada sledi

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A, \qquad V_{Bx} = V_{Ax} + (\vec{V}_B^A)_x.$$

Kako je $(\vec{V}_B^A)_x = 0$, tada je $V_{Bx} = V_{Ax}$.

S obzirom da su tačke A i B proizvoljno izabrane, teorema važi za bilo koje dve tačke na toj osi. Time je teorema dokazana.

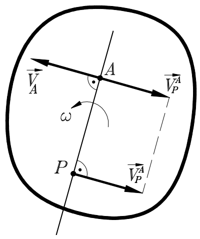
Trenutni pol brzina ravne figure

Ako je pri kretanju ravne figure njena ugaona brzina u posmatranom trenutku različita od nule, tada postoji jedna i samo jedna njena tačka čija je brzina u tom trenutku jednaka nuli. Ta tačka se naziva trenutni pol brzina ravne figure i obeležava se sa P. Iz

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_P^A$$

i uslova da je brzina tačke P ravne figure takva da za nju važi $\vec{V}_P = 0$ sledi $\vec{V}_P^A = -\vec{V}_A$.

a) pravci brzina $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_P^A$ moraju da budu paralelni. Kako je i $\vec{V}_P^A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$, sledi da su vektori $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_P^A$ upravni na pravac koji prolazi kroz tačke A i P. Iz toga proizilazi da se tačka P nalazi na pravoj kroz tačku A upravnoj na $\vec{V}_A$;



b) intenziteti brzina $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_P^A$ moraju da budu jednaki. Iz toga proizilazi na kom rastojanju od tačke A sa nalazi tačka P. Kako je

$$V_A = \overline{AP} \cdot \omega, \quad \overline{AP} = \frac{V_A}{\omega};$$

c) tačka P mora se nalaziti na onoj polupravoj iz tačke A, upravnoj na $\vec{V}_A$, tako da je zadovoljena relacija $\vec{V}_P^A = -\vec{V}_A$.

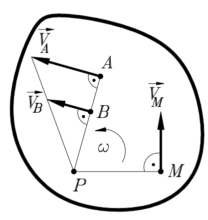
Trenutni pol brzina je jedna i samo jedna tačka koja u tom trenutku ima svojstvo da joj je brzina jednaka nuli. Ovo se može pokazati polazeći od suprotne pretpostavke da postoji još jedna tačka, npr. P_1, čija je brzina takođe jednaka nuli. Tada bi, birajući pol brzina P za pol translacije, sledilo da je

$$\vec{V}_{P_1}^P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PP_1} = 0 .$$

Kako je $\vec{\omega}$ upravno na $\overrightarrow{PP_1}$ i kako je $\omega \neq 0$ sledi da mora biti $\overrightarrow{PP_1} = 0$, čime je pokazano da u jednom trenutku ne može da postoji više od jednog trenutnog pola brzina ravne figure.

Određivanje brzina tačaka ravne figure pomoću trenutnog pola brzina

Ako je poznata brzina jedne tačke ravne figure, kao i njen trenutni pol brzina, tada je moguće odrediti ugaonu brzinu i brzinu bilo koje tačke ravne figure. U tom cilju bira se pol brzina P za pol translacije, tako da za proizvoljnu tačku M ravne figure važi



$$\vec{V}_M = \vec{V}_M^P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM} .$$

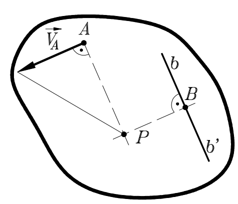
jer je $\vec{V}_P = 0$. Slični izrazi mogu se pisati i za druge tačke ravne figure, tako da je

$$V_A = \overline{AP}\omega, \quad V_B = \overline{BP}\omega, \quad \ldots \quad V_M = \overline{MP}\omega,$$

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \cdots = \frac{V_M}{MP} .$$

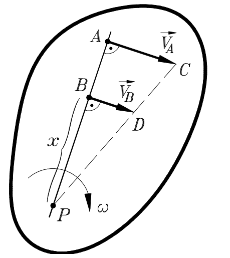
Različiti slučajevi određivanja položaja trenutnog pola brzina ravne figure

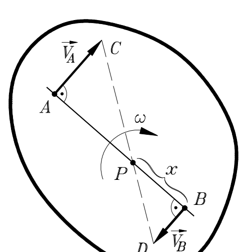
Na osnovu prethodnih razmatranja može se odrediti položaj trenutnog pola brzina ravne figure. Neka se u tom cilju posmatra kretanje ravne figure kod koje je poznata brzina jedne njene tačke, npr. $\vec{V}_A$ i pravac brzine neke druge tačke, npr bb_1 koji nije paralelan sa pravcem brzine $\vec{V}_A$. Pokazuje se da se trenutni pol brzina ravne figure nalazi u preseku normala na pravce tih brzina.



Pri određivanju trenutnog pola brzina ravne figure mogući su različiti slučajevi.

I) Brzine dveju tačaka ravne figure, koje pripadaju jednoj pravoj, međusobno su paralelne i upravne na tu pravu. Zavisno od smerova tih brzina razlikuju se dva slučaja. Povlačenjem prave koja prolazi kroz krajeve vektora brzina $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_B$ do preseka sa pravom koja prolazi kroz tačke A i B dobija se tačka P. Na taj način dobijena su dva slična trougla ΔPAC i ΔPBD. Iz sličnosti tih trouglova sledi





$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP},$$

odakle sledi da je tačka P trenutni pol brzina ravne figure.

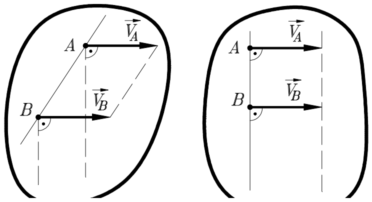
a) Ako su brzine tačaka A i B ravne figure istog smera, a različitih intenziteta, intenzitet ugaone brzine i položaj trenutnog pola brzina ravne figure može se odrediti na sledeći način

$$V_A = V_A^P = (\overline{AB} + x)\omega,$$
$$V_B = V_B^P = x\omega.$$
$$\omega = \frac{V_A - V_B}{\overline{AB}}, \qquad x = \overline{BP} = \frac{V_B}{V_A - V_B}\overline{AB}\cdot$$

b) Ako su brzine tačaka A i B ravne figure različitih smerova i intenziteta, na analogan način se nalazi

$$V_A = (\overline{AB} - x)\omega, \qquad V_B = x\omega,$$
$$\omega = \frac{V_A + V_B}{\overline{AB}}, \qquad x = \frac{V_B}{V_A + V_B}\overline{AB}\cdot$$

II) Brzine dveju tačaka ravne figure međusobno su paralelne, istih smerova i jednakih intenziteta.



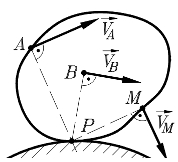
Pri tome prava kroz te dve tačke A i B u opštem slučaju može da zauzima proizvoljan ugao u odnosu na pravce brzina $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_B$, ili da bude upravna na njih. Tada je

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} = 0.$$

Kako je $\overline{AB} \neq 0$ i $\angle(\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}) = 90^o$, iz prethodnog izraza sledi da je $\omega = 0$.

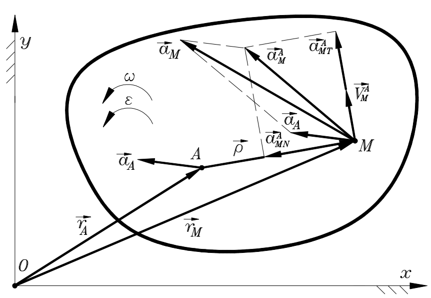
Dakle, u ovom slučaju reč je o trenutnom translatornom rasporedu brzina tačaka ravne figure.

III) Ako se telo kreće po površini drugog tela, pri čemu oba tela u tački dodira imaju zajedničku tangentu, a brzine dodirnih tačaka su jednake, kaže se da se telo kotrlja bez klizanja. Poseban je slučaj kada se posmatrano telo kreće po površini nepokretnog tela. U tom slučaju i brzina tačke tela koja je u dodiru sa nepokretnim telom ima brzinu koja je jednaka nuli. To znači da je u slučaju kotrljanja bez klizanja tela po nepokretnom telu trenutni pol brzina na mestu dodira ta dva tela.



Određivanje ubrzanja tačke tela pri ravnom kretanju

Posmatra se kretanje ravne figure kod koga je poznato ubrzanje jedne tačke, npr. $\vec{a}_A$, kao i intenziteti i smerovi ugaone brzine i ugaonog ubrzanja ravne figure . U cilju određivanja ubrzanja proizvoljne tačke ravne figure diferencira se po vremenu izraz za brzinu, tako da se dobija



$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_M = \dot{\vec{V}}_A + \dot{\vec{V}}_M^A.$$

Pri tome je sa $\dot{\vec{V}}_A = \vec{a}_A$ označeno ubrzanje proizvoljno izabranog pola translacije A i gde je sa $\dot{\vec{V}}_M^A = \vec{a}_M^A$ naznačeno da je reč o komponenti ubrzanja tačke M u odnosu na tačku A, odnosno da je reč o komponenti ubrzanja tačke M usled obrtanja ravne figure oko ose $A\zeta$ upravne na ravnu figuru. Ova komponenta ubrzanja naziva se obrtna komponenta ubrzanja tačke M. Tada, koristeći izraze $\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} = \vec{V}_M^A$ i $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_M^A = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, prethodna relacija postaje

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_M^A.$$

- Komponenta $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$ upravna je na vektore $\vec{\varepsilon}$ i $\vec{\rho}$, odnosno ima pravac obrtne komponente brzine $\vec{V}_M^A$. Intenzitet ove komponente određen je sa $|\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}| = \rho\varepsilon$. Ova komponenta obrtnog ubrzanja tačke M naziva se obrtno tangencijalno ubrzanje tačke M u odnosu na tačku A i označava se sa $\vec{a}_{MT}^A = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$.
- Komponenta $\vec{\omega} \times \vec{V}_M^A$ obrtnog ubrzanja tačke M upravna je na vektore $\vec{\omega}$ i $\vec{V}_M^A$, tj. ima pravac vektora $\vec{\rho}$ i uvek je usmerena od tačke M ka tački A. Intenzitet ove komponente ubrzanja tačke M je

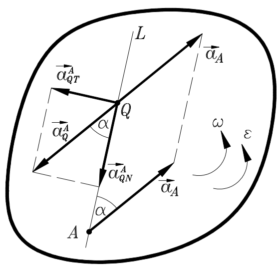
$\left|\vec{\omega}\times\vec{V}_M^A\right| = \rho\omega^2$. Ova komponenta obrtnog ubrzanja tačke M naziva se obrtno normalno ubrzanje tačke M u odnosu na tačku A i označava se sa $\vec{a}_{MN}^A = \vec{\omega}\times\vec{V}_M^A$, tj. koristeći (3.66) važi $\vec{a}_{MN}^A = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MN}^A + \vec{a}_{MT}^A,\ \vec{a}_M^A = \vec{a}_{MT}^A + \vec{a}_{MN}^A.$$

$$a_M^A = \overline{AM}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},\quad \alpha = \angle(\vec{a}_M^A,\vec{a}_{MN}^A),\quad tg\alpha = \frac{a_{MT}^A}{a_{MN}^A} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Trenutni pol ubrzanja ravne figure

Ako ugaona brzina i ugaono ubrzanje ravne figure u posmatranom trenutku nisu jednaki nuli tada postoji jedna i samo jedna tačka ravne figure čije je ubrzanje jednako nuli. Ta tačka se naziva trenutni pol ubrzanja ravne figure i obeležava se sa Q.



Neka se posmatra kretanje ravne figure tako da je u posmatranom trenutku poznato ubrzanje $\vec{a}_A$ jedne njene tačke A, kao i vektori ugaone brzine $\vec{\omega}$ i ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$. Ako se tačka A izabere za pol translacije, tada iz izraza za ubrzanje $\vec{a}_Q$ trenutnog pola ubrzanja Q, tj.

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_Q^A,$$

i uslova da je ubrzanje tačke Q ravne figure jednako nuli, sledi

$$\vec{a}_Q^A = -\vec{a}_A.$$

Ova relacija može poslužiti za određivanje položaja tačke Q.

a) Pravci vektora $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_Q^A$ su paralelni. Tome treba dodati da je, na osnovu poznatih intenziteta ε i ω, moguće odrediti ugao α, koji obrtna komponenta ubrzanja $\vec{a}_Q^A$ zaklapa sa pravom koja prolazi kroz tačke Q i A, tj.

$$\alpha = arctg\left(\frac{a_{QT}^A}{a_{QN}^A}\right) = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

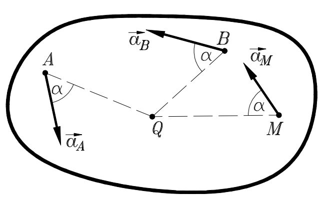
Određivanjem ovog ugla određena je i poluprava AL na kojoj se nalazi tačka Q čije je ubrzanje jednako nuli. Naime, poluprava AL dobija se tako što se vektor ubrzanja $\vec{a}_A$ tačke A zaokrene oko tačke A za ugao α u smeru koji je određen smerom vektora ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$.

b) Intenziteti vektora $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_Q^A$ su jednaki, odakle sledi da je

$$a_A = a_Q^A = \overline{AQ}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},\quad \overline{AQ} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}.$$

Iz prethodnog proizilazi da se u razmatranom trenutku može jednoznačno odrediti položaj tačke Q tako što se ubrzanje proizvoljno izabrane tačke A zaokrene za ugao α, u smeru ugaonog ubrzanja ravne figure i na tako dobijenoj polupravoj nanese duž $\overline{AQ}$.

Određivanje ubrzanja tačaka ravne figure pomoću trenutnog pola ubrzanja



Ako je u posmatranom trenutku poznat trenutni pol ubrzanja Q, i ako su poznati ugaona brzina $\vec{\omega}$ i ugaono ubrzanje $\vec{\varepsilon}$ ravne figure, moguće je odrediti ubrzanje bilo koje njene tačke. U tom cilju može se usvojiti trenutni pol ubrzanja za pol translacije. Tada je

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^Q,$$

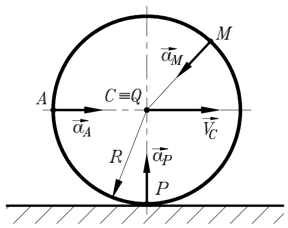
jer je $\vec{a}_Q = 0$. Slični izrazi mogu se pisati i za druge tačke ravne figure tako da je

$$a_A = \overline{AQ}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},$$
$$a_B = \overline{BQ}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},\qquad \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} = \frac{a_A}{\overline{AQ}} = \frac{a_B}{\overline{BQ}} = \cdots = \frac{a_M}{\overline{MQ}}.$$
$$\vdots$$
$$a_M = \overline{MQ}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}.$$

Različiti slučajevi određivanja položaja trenutnog pola ubrzanja ravne figure

Zavisno od kinematičkih karaktertistika i karaktera kretanja, pri određivanju trenutnog pola ubrzanja mogu nastupiti sledeći slučajevi.

I) Neka je u nekom intervalu vremena brzina neke tačke ravne figure konstantna. Kao ilustracija ovog slučaja može se navesti primer kotrljanja bez klizanja, po nepokretnoj podlozi, točka poluprečnika *R*, pri čemu je brzina središta $\vec{V}_C = const.$. Kako je trenutni pol brzina točka na mestu dodira točka sa podlogom, sledi da je intenzitet brzine centra *C* točka određen sa $V_C = \overline{CP}\omega = R\omega$, odnosno $\omega = \dfrac{V_C}{R} = const$.



Dakle, ako je u nekom intervalu vremena intenzitet brzine središta točka, koji se kotrlja po nepokretnoj podlozi, konstantan ($V_C = const.$) u tom intervalu vremena je $\omega = const.$ i $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$. Takođe, u tom intervalu vremena je trenutni pol ubrzanja u središtu točka, tj. $C \equiv Q$.

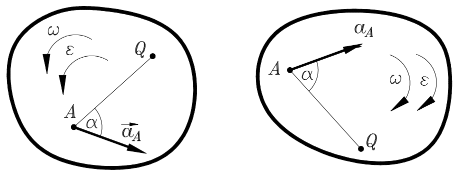
Birajući trenutni pol ubrzanja *C* za pol translacije sledi da se za proizvoljnu tačku *M* točka može pisati

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MN}^{C},$$

jer je $\vec{a}_C = 0$ i $a_{MT}^{C} = \overline{MC}\,\varepsilon = 0$.

II) Neka je u datom trenutku poznato ubrzanje jedne tačke ravne figure, npr. $\vec{a}_A$, kao i vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja ravne figure, tj. $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$.

a) Ako je $\omega \neq 0$ i $\varepsilon \neq 0$, trenutni pol ubrzanja nalazi se na sledeći način: potraži se najpre ugao α koji određuje pravac na kome se nalazi trenutni pol ubrzanja, tj.



$$\alpha = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

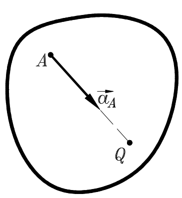
i nanosi se, u odnosu na $\vec{a}_A$, u smeru ugaonog ubrzanja ε. Zatim se na taj pravac nanosi veličina $\overline{AQ}$ određena relacijom

$$\overline{AQ} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Time je određen položaj trenutnog pola ubrzanja *Q* ravne figure.

b) Ako je $\omega \neq 0$ i $\varepsilon = 0$, sledi

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0,$$

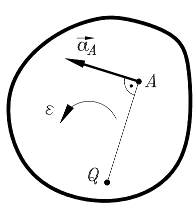


tj.

$$\alpha = 0,$$

što znači da se pravci *AQ* i pravac vektora $\vec{a}_A$ poklapaju. Tada je položaj trenutnog pola ubrzanja određen sa

$$\overline{AQ} = \frac{a_A}{\omega^2}.$$

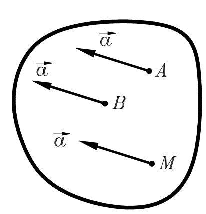


c) Ako je $\omega = 0$ i $\varepsilon \neq 0$, sledi

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty, \quad \alpha = 90^o.$$

U ovom slučaju je pravac *AQ* upravan na pravac vektora $\vec{a}_A$, a rastojanje $\overline{AQ}$ određeno je relacijom

$$\overline{AQ} = \frac{a_A}{\varepsilon}.$$



d) Ako je $\omega = 0$ i $\varepsilon = 0$, tada sledi

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \cdots = \vec{V}_M \equiv \vec{V},$$

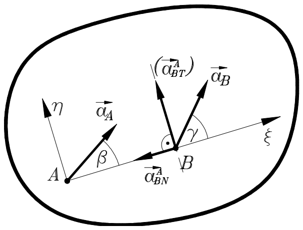
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \cdots = \vec{a}_M \equiv \vec{a}.$$

Dakle, ako su ugaona brzina i ugaono ubrzanje ravne figure istovremeno jednaki nuli, sve tačke ravne figure imaju brzine i ubrzanja kao i pol translacije *A*. Ako je u posmatranom trenutku $\vec{a}_A \neq 0$, sledi da je trenutni pol ubrzanja ravne figure u beskonačnosti.

III) Neka su u datom trenutku poznata ubrzanja dveju tačaka ravne figure, npr. $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_B$.

a) Neka su pravci vektora $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_B$ određeni uglovima β i γ u odnosu na osu $A\xi$ koja prolazi kroz tačke A i B. Birajući tačku A za pol translacije može se pisati

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A .$$



Projektovanjem prethodne relacije na upravne ose $A\xi$ i $A\eta$ dobija se

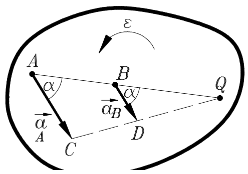
$$a_B \cos\gamma = a_A \cos\beta - a_{BN}^A ,$$

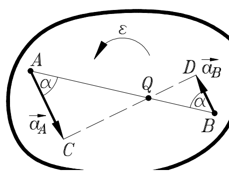
$$a_B \sin\gamma = a_A \sin\beta + a_{BT}^A ,$$

pri čemu je smer vektora $\vec{a}_{BT}^A$ pretpostavljen. Kako je $a_{BN}^A = \overline{AB}\,\omega^2$ i $a_{BT}^A = \overline{AB}\,\varepsilon$ sledi da je

$$\omega^2 = \frac{a_A \cos\beta - a_B \cos\gamma}{\overline{AB}},$$

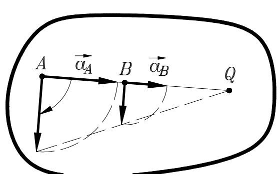
$$\varepsilon = \frac{a_B \sin\gamma - a_A \sin\beta}{\overline{AB}}.$$

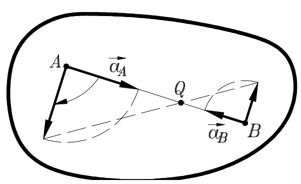




b) Neka su u datom trenutku ubrzanja dveju tačaka ravne figure međusobno paralelna i neka zaklapaju proizvoljan ugao sa pravom koja prolazi kroz te tačke. Zavisno od smerova ovih ubrzanja razlikuju se dva slučaja. Ako se kroz krajeve vektora $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_B$ povuče prava i potraži presek te prave sa pravom kroz tačke A i B, dobiće se tačka Q koja je zajedničko teme sličnih trouglova ΔQAC i ΔQBD. Iz sličnosti tih trouglova sledi

$$\frac{a_A}{\overline{AQ}} = \frac{a_B}{\overline{BQ}},$$





odakle sledi da je tačka Q trenutni pol ubrzanja ravne figure.

c) Ako su ubrzanja dveju tačaka ravne figure kolinearni vektori istih ili suprotnih smerova može se pokazati da se problem određivanja trenutnog pola ubrzanja svodi na prethodni slučaj, tj. rotacijom vektora ubrzanja u istom smeru za $\pi/2$ ovaj problem se svodi na prethodni, III)b).