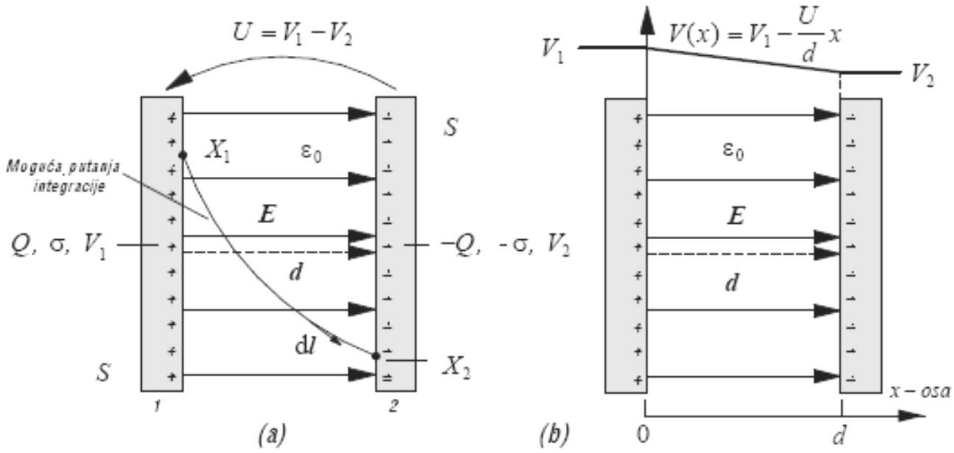
Pločast ili ravan vakuumski kondenzator

Na sl. 16a prikazan je pločasti vakuumski kondenzator čije su elektrode paralelne metalne ploče 1 i 2, površine *S*, postavljene na odstojanju *d* i naelektrisane količinama elektriciteta $\pm Q$.



Sl.16

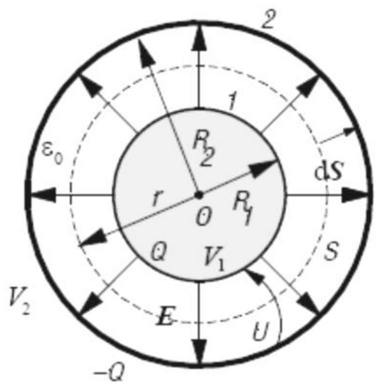
Ako se pretpostavi da je rastojanje *d* znatno manje od površine ploča *S*, može se smatrati da je površinska gustina naelektrisanja na *unutrašnjim površima* ploča konstantna $\pm\sigma = \pm Q/S$ i da homogeno električno polje intenziteta $E=|\boldsymbol{E}|= \sigma/\varepsilon_0 = Q/(\varepsilon_0 \cdot S)$ postoji samo u prostoru između ploča (ivični efekat se zanemaruje). Neka je V_1 potencijal pozitivne ploče 1, a V_2 potencijal negativne ploče 2. Ako se putanja integracije po pravcu i smeru poklapa sa linijama polja, za napon između ploča se dobija

$$U = V_1 - V_2 = \int_{X_1}^{X_2} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{S\varepsilon_0} d \text{ , pa je onda } C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \ .$$

Na sl. 16b prikazana je i raspodela potencijala u polju pločastog kondenzatora.

Sferni vakuumski kondenzator

Na sl. 17 prikazan je sferni vakuumski kondenzator sa elektrodama 1 i 2 u obliku metalne sfere i tanke, metalne, koncentrične sferne ljuske. Njegove elektrode mogu biti i dve tanke, metalne, koncentrične sferne ljuske. Kada se elektrode priključe na izvor konstantnog napona *U*, one se opterete količinama elektriciteta Q_1=*Q* i Q_2=-*Q* do potencijala V_1 i V_2, respektivno. Primenom Gausovog zakona na koncentričnu sfernu površ poluprečnika $r>R_2$, pokazuje se da električno polje ne postoji izvan kondenzatora, a naravno nema ga ni kada je $r<R_1$. Polje je zbog sferne simetrije sistema radijalno u vakuumu između elektroda, a njegov intenzitet u tačkama koncentrične sferne površi *S* poluprečnika $R_1 \le r \le R_2$ moguće je odrediti pomoću Gausovog zakona:



Sl. 17

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S E\cdot dS = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,,\ R_1 \le r \le R_2$$

sa pravcem i smerom kao na slici. Maksimalna jačina polja je neposredno uz unutrašnju elektrodu i iznosi $E_{\max} = E(r = R_1) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$.

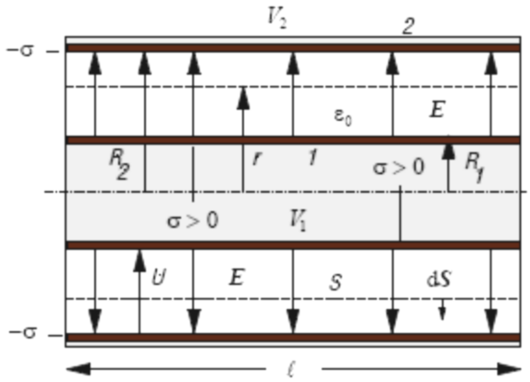
Napon U=V_1-V_2 između elektroda 1 i 2 i kapacitivnost C ovog kondenzatora su :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_1\cdot R_2}{R_2 - R_1}\,.$$

Cilindrični vakuumski kondenzator

Prav metalni cilindar 1 kružnog poprečnog preseka i šupalj koaksijalni metalni cilindar 2, oba velike dužine u odnosu na unutrašnji prečnik (sl. 18), obrazuju *koaksijalni vod*. Odsečak voda dužine l predstavlja *cilindrični kondenzator*. Ako se elektrode 1 i 2 priključe na konstantan napon U, one se opterete naelektrisanjem *podužne gustine* $Q_1'=Q'$ i $Q_2'=-Q'$.



Sl. 18

Primenom Gausovog zakona na koaksijalnu cilindričnu površ poluprečnika r > R_2 pokazuje se da električno polje ne postoji izvan kondenzatora, a naravno nema ga ni kada je $r<R_1$. *Zanemarujući ivične efekte*, električno polje u vakuumu između elektroda biće aksijalno simetrično, a njegov intenzitet u tačkama cilindrične površi S poluprečnika $R_1 \le r \le R_2$ može se odrediti Gausovim zakonom

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S E\cdot \mathrm{d}S = E\cdot 2\pi r l = \frac{Q'\cdot l}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r} \ \wedge\ \boldsymbol{E} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{r}_0,\quad R_1 \le r \le R_2\,.$$

Kako su linije polja paralelne osnovama cilindrične površi S fluks kroz njih je nula. $\boldsymbol{r}$ je vektor položaja tačaka na površi S u odnosu na osu voda.

Napon U između elektroda, *podužna* kapacitivnost C', jačina polja E i njena maksimalna vrednost $E_{\max}$, kod ovog kondenzatora dati su sledećim relacijama:

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)},\quad E = |\boldsymbol{E}| = \frac{U}{r\cdot\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)},\quad E_{\max} = E(r = R_1) = \frac{U}{R_1\cdot\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}\,.$$

Kapacitivnost C kondenzatora dužine l u ovom slučaju određuje se iz relacije $C=C'\cdot l$.

1. zadatak: Oko metalne lopte poluprečnika *a* i naelektrisanja *Q>0* u vazduhu, koncentrično je postavljena nenaelektrisana metalna sferna ljuska poluprečnika *b* i *c*. Odrediti:

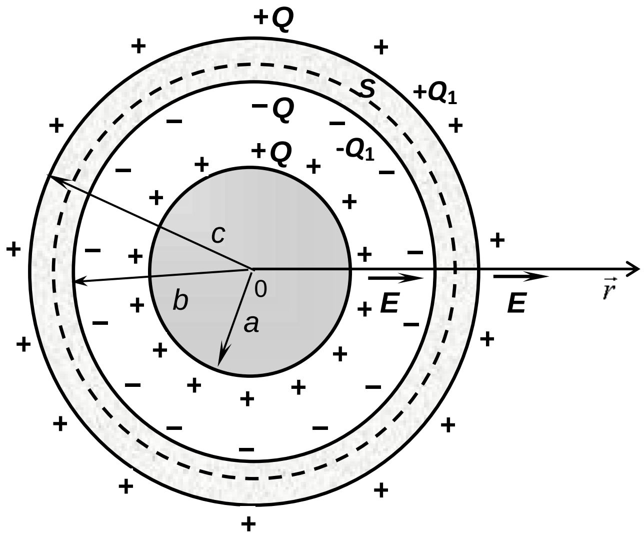
a) Konačnu raspodelu naelektrisanja na sferi i sfernoj ljusci po završetku elektrostatičke indukcije

b) Električno polje u čitavom prostoru

c) Potencijal sfere i sferne ljuske u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.

Rešenje:

a) Pod dejstvom električnog polja metalne lopte dolazi do razdvajanja naelektrisanja unutar provodne ljuske (elektrostatička indukcija). Negativno naelektrisanje privučeno pozitivno naelektrisanom metalnom loptom, „izbija“ na unutrašnju površinu sferne ljuske, dok pozitivno naelektrisanje, težeći da se maksimalno udalji od metalne lopte, „izbija“ na spoljašnju površinu ljuske. Kako je sferna ljuska i dalje elektroneutralna, jer ne postoji provodna putanja kojom bi naelektrisanje moglo doći ili otići sa ljuske, to su indukovane jednake količine nalektrisanja suprotnog znaka (Q_1 i – Q_1) na površima ljuske.



Primenom Gausovog zakona na sfernu površ *S* koja se nalazi unutar sferne ljuske dobija se $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = (Q-Q_1)/\varepsilon_0$. Kako u unutrašnjosti metalne ljuske nema električnog polja (***E***=0), to je leva strana Gausovog zakona jednaka nuli, pa je onda i desna strana takođe jednaka nuli, tj. $0=(Q-Q_1)/\varepsilon_0$, iz čega sledi *Q=Q₁*. Dakle na unutrašnju i spoljašnju površinu metalne ljuske izbijaju količine naelektrisanja –*Q* i +*Q*, respektivno.

b) Neka je ***r*** osa orijentisana kao na slici. Unutar metalne sfere nema električnog polja, pa je $\boldsymbol{E}(r)=0$, $r<a$. Jačinu polja Između lopte i sferne ljuske odredićemo Gausovim zakonom za usvojenu sfernu *S* površ poluprečnika $a \le r \le b$: $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, $E(r)\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ sledi

$E(r)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$, $\boldsymbol{E}(r)=E(r)\cdot\boldsymbol{r}_0$, $a\le r\le b$, gde je $\boldsymbol{r}_0$ jedinični vektor ***r*** ose. Unutar sferne ljuske, za $b \le r \le c$, nema električnog polja $\boldsymbol{E}(r)=0$. Izvan sferne ljuske, primenom Gausovog zakona na sferu poluprečnika $c<r$, dobija se $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \dfrac{Q-Q+Q}{\varepsilon_0}$, $E(r)\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, pa je

$E(r)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$, $\boldsymbol{E}(r)=E(r)\cdot\boldsymbol{r}_0$, $c<r$.

c) Potencijal metalne lopte za referentnu tačku u beskonačnosti i putanju integracije po ***r*** osi je:

$$V_{sfere}=\int_a^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_a^\infty E\cdot dr=\int_a^b E(r)\cdot dr+\underbrace{\int_b^c E(r)\cdot dr}_{=0}+\int_c^\infty E\cdot dr$$

$$V_{sfere}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{dr}{r^2}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_c^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_a^b+\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_c^\infty\right]=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right].$$

Potencijal sferne ljuske, pod istim uslovima, je

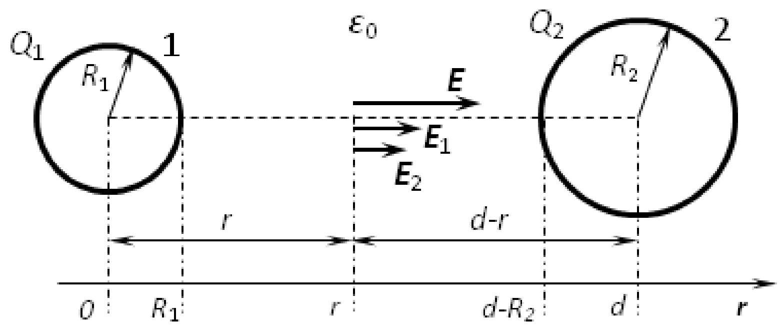
$$V_{ljuske}=\int_c^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_c^\infty E\cdot dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_c^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\bigg|_c^\infty\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c}.$$

Napon između lopte i sferne ljuske je

$$U=V_{sfere}-V_{ljuske}=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

2. zadatak: Dve usamljene metalne sfere poluprečnika R_1=4[mm] i R_2=6[mm] i naelektrisanja $Q_1=-Q_2=2\cdot10^{-10}$[C] nalaze se u vakuumu na međusobnom rastojanju d=1[m]. Odrediti napon između sfera.

Rešenje:



Napon između sfera **1** i **2** jednak je linijskom integralu vektora jačine polja ***E*** po nekoj, proizvoljno odabranoj putanji koja ih povezuje.

$$U=V_1-V_2=\int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$, gde je $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$.

Rezultantno električno polje ***E*** u prostoru oko sfera je superpozicija polja obe sfere. U nekoj tački koja se nalazi na rastojanju $r>R_1$ od centra prve sfere, primenom Gausovog zakona lako se dobija

$$\oint_S \boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{S}=E_1\cdot 4\pi r^2=\frac{Q_1}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad E_1(r)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

Analognim postupkom, uzimajući u obzir da je druga sfera negativno naelektrisana sledi:

$$\oint_S \boldsymbol{E}_2\cdot d\boldsymbol{S}=E_2\cdot 4\pi (d-r)^2=\frac{Q_2}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad E_2(r)=\frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d-r)^2}$$

. Pravci i smerovi vektora $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{E}_2$ označeni su na slici. Kako je $Q_1=|Q_2|$, a vektori $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{E}_2$ kolinearni, intenzitet rezultantog polja je

$$E=E_1+E_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d-r)^2}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(d-r)^2}\right).$$

Primetimo da su samo duž pravca koji spaja centre sfera vektori $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{E}_2$ kolinearni. Za putanju integracije pri određivanju napona, zbog jednostavnosti, biramo upravo ovaj pravac.

$$U=V_1-V_2=\int_{R_1}^{d-R_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{d-R_2}Edr=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{d-R_2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(d-r)^2}\right)dr=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{R_1}^{d-R_2}\frac{dr}{r^2}+\int_{R_1}^{d-R_2}\frac{dr}{(d-r)^2}\right]$$

Uvodeći smenu $u=d-r$ u drugi integral, dobijamo:

$$U=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{r}\right)\bigg|_{R_1}^{d-R_2}+\left(\frac{1}{u}\right)\bigg|_{d-R_1}^{R_2}\right]=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{d-R_2}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1}\right]$$, odnosno

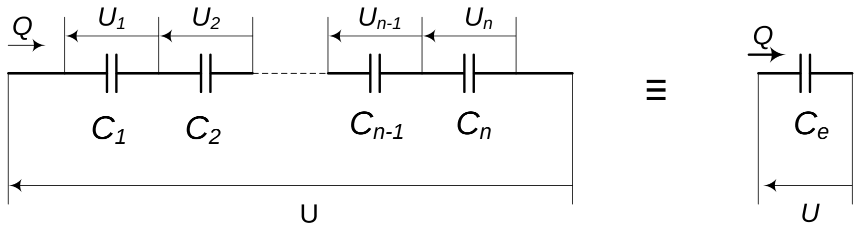
$$U_{12} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{d-R_1}-\frac{1}{d-R_2}\right] = 746.38[\mathrm{V}].$$

Ako primetimo da je $d >> R_1$, R_2, napon između sfera može se približno odrediti kao razlika njihovih potencijala, posmatrajući svaku sferu kao usamljenu naelektrisanu metalnu loptu u vakuumu:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right] = 750[\mathrm{V}].$$

Redno vezivanje kondenzatora

Na slici je prikazana grupa od n redno vezanih kondenzatora kapacitivnosti C_i $(i=\overline{1,n})$ sa konstantnim naponom U na krajevima grupe.



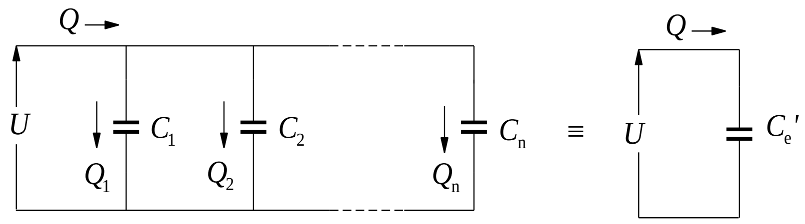
Napon kondenzatora kapacitivnosti C_i je U_i $(i=\overline{1,n})$. Pošto su referentni smerovi za naelektrisanja i napone kod svih kondenzatora usaglašeni, tada se *ekvivalentna kapacitivnost* C_e određuje iz sledećih relacija:

$$U_\mathrm{i} = \frac{Q}{C_\mathrm{i}}\ (i=\overline{1,n});\quad U=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} U_\mathrm{i} = Q\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{C_\mathrm{i}} \equiv \frac{Q}{C_\mathrm{e}}\quad (\forall Q\neq 0)\ \Rightarrow\ \frac{1}{C_\mathrm{e}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{C_\mathrm{i}},$$

Ekvivalentna kapacitivnost grupe redno vezanih kondenzatora manja je od minimalne kapacitivnosti kondenzatora iz grupe.

Paralelno vezivanje kondenzatora

Na slici je prikazana grupa od n paraleno vezanih kondenzatora kapacitivnosti C_i sa konstantnim naponom U na svakom od njih.



Pošto su referentni smerovi za naelektrisanja i napone kondenzatora usaglašeni, *ekvivalentna kapacitivnost* C_e određuje se iz sledećih relacija:

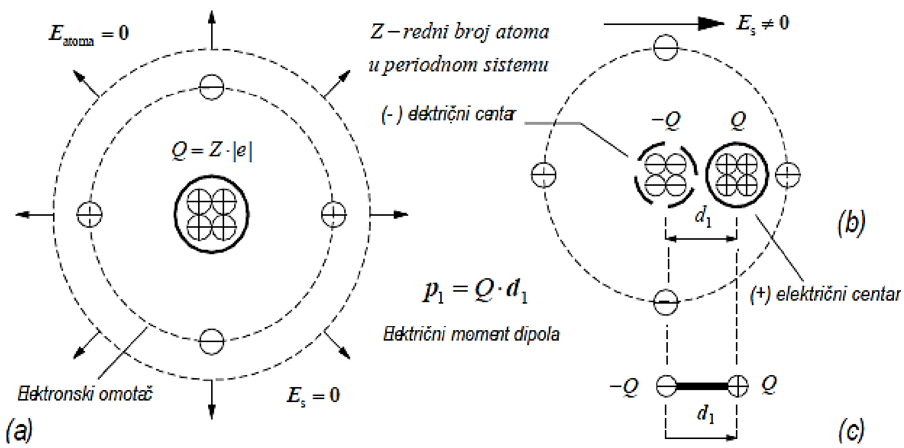
$$Q_\mathrm{i} = C_\mathrm{i}\cdot U\ \ (i=\overline{1,n});\ \ Q=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} Q_\mathrm{i} = U\cdot\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} C_\mathrm{i} \equiv C_\mathrm{e}\cdot U\quad (\forall U\neq 0)\quad \Rightarrow\quad C_\mathrm{e} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} C_\mathrm{i}.$$

Ekvivalentna kapacitivnost C_e grupe paralelno vezanih kondenzatora veća je od maksimalne kapacitivnosti kondenzatora iz grupe.

Elektrostatičko polje u supstanciji i polarizacija dielektrika

Pod dielektricima ili izolatorima podrazumevaju se čvrste, tečne i gasovite supstancije koje za razliku od provodnika ne sadrže slobodna pokretljiva električna opterećenja, pre svega "slobodne" elektrone. Elementarna naelektrisanja oba znaka koja ulaze u sastav dielektrične supstancije vezana su elastičnim unutrašnjim atomskim i molekularnim silama i mogu se pod dejstvom spoljašnjeg električnog polja pomerati samo na mikroskopski mala rastojanja. Ta naelektrisanja ne mogu napustiti matične atome i molekule, osim u slučaju polja vrlo velikog intenziteta kada dolazi do *proboja dielektrika* i njegove termičke destrukcije.

Polarizacija je *elastična deformacija atoma i molekula* dielektrika pod dejstvom *spoljašnjeg* (ili *stranog*) električnog polja. Pretpostavimo da se dielektrik nalazi izvan stranog električnog polja ($\boldsymbol{E}_s$=**0**). Tada se u svakom atomu poklapaju *ekvivalentni električni centri* pozitivnog i negativnog elektriciteta, pa je električno polje izvan atoma $\boldsymbol{E}_{\text{atoma}}$=**0** (slika a). Dakle, spolja gledano, atomi se tada ponašaju kao električno neutralni sistemi. Međutim, kada se dielektrik nađe u stranom električnom polju $\boldsymbol{E}_s$ (slika b), na elementarna naelektrisanja u atomima i molekulima deluju Kulonove sile koje pozitivne čestice pomeraju u pravcu i smeru polja, a negativne suprotno od njega. Pomeraji čestica iz ravnotežnih položaja ograničeni su na mikroskopski mala rastojanja d_1, s obzirom da se dejstvu stranog polja suprotstavljaju elastične unutrašnje atomske i molekularne sile. Polarizacijom dielektrika razdvojeni *ekvivalentni električni centri* pozitivnog i negativnog elektriciteta u atomima (slika b) formiraju *pojedinačne električne dipole* (slika c).

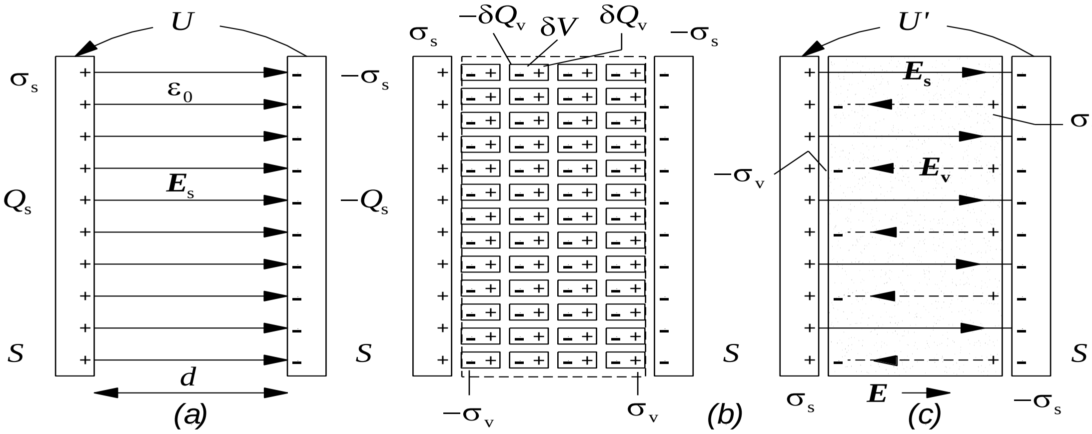


Makroskopska veličina koja opisuje polarizovanost dielektrika zove se ***vektor polarizacije P*** *:*

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_{\delta V} \mathbf{p}}{\delta V}$$, gde je $\sum_{\delta V} \mathbf{p}$ vektorski zbir električnih momenata dipola u zapremini δV.

Polarizovani dielektrik u električnom pogledu ekvivalentan je mnoštvu mikroskopski malih dipola u vakuumu. Rezultantno polje slobodnih naelektrisanja u prisustvu dielektrika superpozicija je polja tih naelektrisanja i polja mnoštva dipola u vakuumu. Element zapremine dielektrika δV na mestu gde je intenzitet polarizacije $\boldsymbol{P}$, ekvivalentan je dipolu električnog momenta $\delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{P}\cdot\delta V$.

Posmatrajmo pločasti vakuumski kondenzator (sl. a), čiji je prostor između elektroda naknadno ispunjen homogenim linearnim dielektrikom (sl. b). Pošto je polarizacija homogena, njen konačni efekat je da na površ dielektrika uz pozitivnu elektrodu izbijaju negativna, a na površ uz negativnu elektrodu izbijaju pozitivna *vezana naelektrisanja* dipola (slike b i c).



Element dielektrika zapremine $\delta V=\delta S\cdot\delta\ell$ ($\delta\ell$ je dužina elementa u pravcu polja, a δS površina njegovog poprečnog preseka) može se predstaviti dipolom električnog momenta, $\delta p=|\delta \boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{P}|\cdot\delta V=P\cdot\delta V=P\cdot\delta S\cdot\delta\ell=\delta Q_v\cdot\delta\ell$, gde je δQ_v vezano naelektrisanje u tom dipolu. Sledi $P=\delta Q_v/\delta S=\sigma_v$, tj. intenzitet vektora polarizacije jednak je površinskoj gustini vezanog naelektrisanja.

Usled pojave vezanih naelektrisanja na čeonim površima dielektrika (slike b i c), polje u kondenzatoru slabi, a napon između elektroda opada (pošto je Q_s=const), ali se povećava kapacitivnost kondenzatora. Vezana površinska naelektrisanja gustine $\sigma_v=P$ stvaraju polje $\boldsymbol{E}_v$, intenziteta $E_v=|\boldsymbol{E}_v|=\sigma_v/\varepsilon_0$, istog pravca a suprotnog smera od polja $\boldsymbol{E}_s$. Neka je E intenzitet rezultantnog električnog polja $\boldsymbol{E}$ u dielektriku. Kako je $\sigma_v=P=a\cdot E$, to je intenzitet polja E (slika c):

$$E=E_s-E_v=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_s-\sigma_v)=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_s-a\cdot E)\quad\Rightarrow\quad E=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_0+a}.$$

Ako se koeficijent polarizacije dielektrika predstavi kao $a=\varepsilon_0\cdot\chi_e$, tada je vektor jačine polarizacije u bilo kojoj tački $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\cdot\chi_e\cdot\boldsymbol{E}$. Kada se uvedu i veličine *relativna permitivnost* $\varepsilon_r=1+\chi_e$ (tj. "relativna dielektrična konstanta") i permitivnost $\varepsilon=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r$ (tj. "dielektrična konstanta"), sledi:

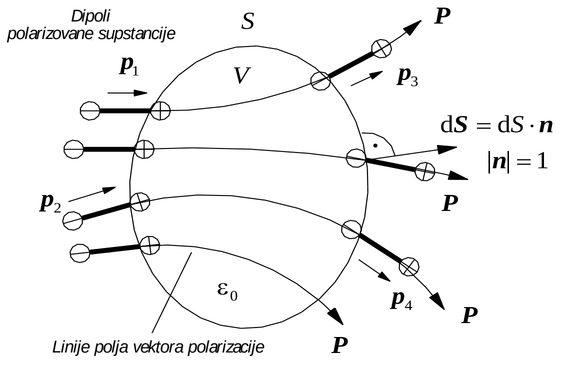
$$E=\frac{U'}{d}=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_0+a}=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}=\frac{\sigma_s}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}=\frac{\sigma_s}{\varepsilon}=\frac{E_s}{\varepsilon_r}=\frac{U}{\varepsilon_r\cdot d}\quad\Rightarrow\quad U'=\frac{U}{\varepsilon_r}.$$

Poslednja relacija pokazuje da kada je Q_s=const, intenzitet električnog polja E i napon U' između elektroda kondenzatora ε_r puta se smanje posle unošenja dielektrika, dok se njegova kapacitivnost $C'= =Q_s/U'=\varepsilon_r\cdot Q_s/U=\varepsilon_r\cdot C$, poveća ε_r puta.

Ako se posmatra domen V ograničen orijentisanom površi S u *bilo kojem polarizovanom dielektriku* (slika 7), tada ukupna količina vezanih naelektrisanja Q_v koja prilikom polarizacije napusti taj domen mora biti jednaka priraštaju količine vezanih naelektrisanja Q_p u domenu uzetim sa negativnim predznakom, tj. $Q_p=-Q_v$. Ukupan *višak vezanih naelektrisanja* Q_p koji je polarizacijom unet u površ S, određen je relacijom:

$$Q_p=-Q_v=-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S}=-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\cdot dS.$$

Posmatrajmo proizvoljno izabranu zatvorenu površ S u dielektriku orijentisanu ka spoljašnjosti koja u sebi sadrži određenu *količinu* Q_s *slobodnih* i *ukupan višak* Q_p *vezanih naelektrisanja*. Tada se kao električni ekvivalent svih slobodnih naelektrisanja i celokupne polarizovane supstancije u domenu V može uzeti naelektrisanje Q_s+Q_p smešteno *u vakuumu.*



Slika 7

Primenom Gausovog zakona na naelektrisanje Q_s+Q_p obuvaćeno površinom S (sl. 7), dobija se najopštija relacija koja važi za svaki dielektrik:

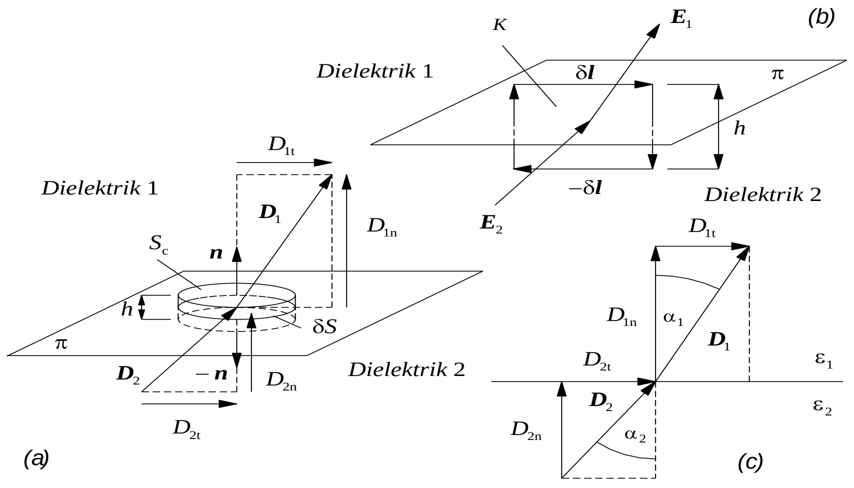
$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_\mathrm{s}+Q_\mathrm{p}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q_\mathrm{s} - \oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right) \quad \Rightarrow \quad \oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_\mathrm{s},\ \text{gde je } \boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

Ovaj rezultat zove se ***generalisani oblik Gausovog zakona***, ili ***Maksvelov postulat***. Vektor ***D*** zove se *vektor električne indukcije*, ili vektor (*di*)*električnog pomeraja*. Njegov Intenzitet D ima dimenziju [C/m^2] i predstavlja površinsku gustinu isključivo slobodnog naelektrisanja.

Kod homogenih dielektrika je $\boldsymbol{D}=\varepsilon\cdot\boldsymbol{E}$ i dovoljno je poznavati samo jedan od vektora ($\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}$) i ε.

Raspodele vektora jačine električnog polja, potencijala i napona, kao i elektrostatičkih sila, u **homogenom dielektriku** permitivnosti ε_r manje su ε_r puta nego kada se ista naelektrisanja, tela i površi nalaze u vakuumu. Kapacitivnost kondenzatora sa **homogenim dielektrikom** veća je ε_r puta nego kapacitivnost istog kondenzatora sa vakuumom (bez dielektrika).

Granični uslovi na razdvojnoj površi dva dielektrika: Ako na razdvojnoj površi između dva dielektrika *nema* slobodnih naelektrisanja, važi jednakost normalnih komponenti vektora ***D*** i jednakost paralelnih (tangencijalnih) komponenti vektora ***E***.



$$\lim_{h\to 0}\oint_{S_c} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{n})\cdot\delta S = (D_{1n}-D_{2n})\cdot\delta S = 0 \;\Rightarrow\; D_{1n}=D_{2n}\,.$$

$$\lim_{h\to 0}\oint_{K} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}_1\cdot\delta\boldsymbol{l}-\boldsymbol{E}_2\cdot\delta\boldsymbol{l} = \left(E_{1t}-E_{2t}\right)\cdot\delta l = 0 \;\Rightarrow\; E_{1t}=E_{2t}$$

Energija sistema W_e od *n* metalnih tela u vakuumu, ili u nekom dielektriku, naelektrisanih količinama elektriciteta Q_i do potencijala V_i , data je izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i\cdot Q_i\,.$$

Elektrostatička energija W_c kondenzatora kapacitivnosti *C* sa proizvoljnim dielektrikom i elektrodama proizvoljnog oblika, gde je $\pm Q$ naelektrisanje elektroda, a $U = V_1 - V_2$ napon između pozitivne i negativne elektrode je:

$$W_c = \frac{1}{2}(V_1\cdot Q_1 + V_2\cdot Q_2) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)\cdot Q = \frac{1}{2}U\cdot Q = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Detaljnija analiza pojava u elektrostatičkim sistemima pokazuje da je energija tih sistema u opštem slučaju lokalizova u elektrostatičkom polju i da su *lokalna vrednost* njene *zapreminske gustine* w_e, kao i ukupna energija W_e u domenu *V*, u opštem slučaju dati izrazima:

$$w_e = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \quad \leftarrow$$ *Lokalna vrednost zapreminske gustine energije polja* (*u tačkama*)

$$W_e = \oint_V w_e\cdot \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\cdot\oint_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}V \quad \leftarrow$$ *Ukupna energija elektrostatičkog polja u domenu V*.

3. zadatak: Oko tanke usamljene metalne sfere poluprečnika *R*=10[cm], naelektrisane količinom nealektrisanja *Q*=10[nC], nalazi se sloj homogenog dielektrika debljine *d*=5[cm], relativne dielektrične permitivnosti ε_r=4, koji je koncentrično postavljen u odnosu na sferu. Sredina je vakuum. Odrediti:

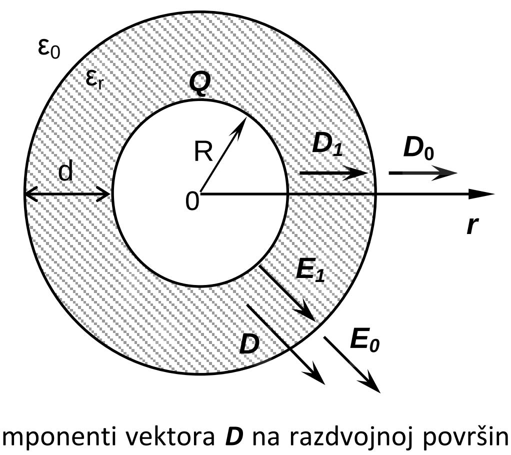
a) Vektore dielektričnog pomeraja i jačine elektrostatičkog polja u čitavom prostoru.

b) Potencijal metalne sfere.

c) Kapacitivnost metalne sfere.

Rešenje:

a) Neka su $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{D}_1$ vektori jačine električnog polja i pomeraja u dielektriku, $\boldsymbol{E}_0$ i $\boldsymbol{D}_0$ odgovarajući vektori u vakuumu i neka je ***r*** osa kao na slici Na površini metalne sfere postoji samo normalna komponenta vektora jačine polja, pa su vektori $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}_1$ kolinearni i upravni na površinu sfere. Kako je dielektrik homogen i linearan (opisan je sa ε_r) vektori ***D*** i ***E*** su kolinearni u čitavom prostoru oko metalne sfere.

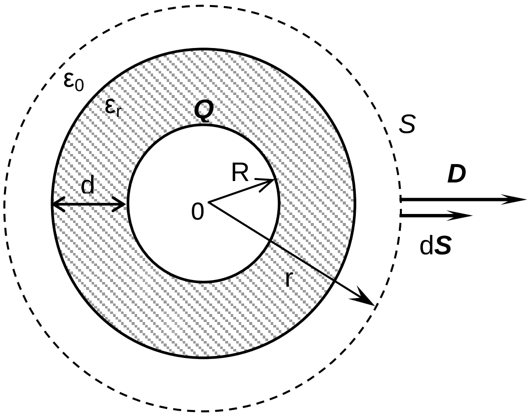


Primetimo da su vektori ***E*** i ***D*** normalni na razdvojnu površinu dielektrik–vakuum. Vakuum je idealni dielektrik. Primenom prvog graničnog uslova o jednakosti normalnih komponenti vektora ***D*** na razdvojnoj površini dva dielektrika i činjenice da su vektori $\boldsymbol{D}_1$ i $\boldsymbol{D}_0$ upravni na razdvojnu površ dobijamo:

$$\boldsymbol{D}_{1n} = \boldsymbol{D}_{0n} \quad\wedge\quad (\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_{1n} \wedge \boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{D}_{0n}) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{D}\,.$$

Dakle, vektor ***D*** se ne „prelama“ pri prelasku iz dielektrika u vakuum. Jednakost vektora ***D*** u obe sredine povlači nejednakost vektora jačine električnog polja ***E*** u dielektriku i u vakuumu.

Neka je $\boldsymbol{D} = D(r)\cdot \boldsymbol{r}_0$, gde je $\boldsymbol{r}_0$ jedinični vektor ***r*** ose. Primenimo generalisani Gausov zakon na sfernu površ poluprečnika $r > R$: $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = Q_S$. Zbog simetrije, vektor ***D*** je homogen po površini sfere *S* i ima isti pravac i smer kao i vektor d***S***, pa je



$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S D\cdot dS = D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q \text{, tj.}$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \;,\; r \ge R \;.$$

Vektor jačine električnog polja ***E*** je :

$$E_1(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\frac{1}{r^2} \;,\; \boldsymbol{E}_1(r) = E_1(r)\cdot\boldsymbol{r}_0 \;,\; R \le r \le R+d \text{ (u dielektriku), odnosno}$$

$$E_0(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2} \;,\; \boldsymbol{E}_0(r) = E_0(r)\cdot\boldsymbol{r}_0 \;,\; R+d \le r \le \infty \text{ (u vakuumu).}$$

Unutar metalne sfere $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} = 0$, za $r < R$.

b) Potencijal metalne sfere je najjednostavnije odrediti ako putanja integracije bude ***r*** osa:

$$V_s = V(r=R) = \int_{r=R}^{\infty} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_R^{R+d} \boldsymbol{E}_1(r)\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{R+d}^{\infty} \boldsymbol{E}_0(r)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_R^{R+d} E_1(r)\cdot dr + \int_{R+d}^{\infty} E_0(r)\cdot dr$$

$$V_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\int_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} + \int_{R+d}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) + \frac{1}{R+d}\right] = 675[\mathrm{V}]$$

c) $$C = \frac{Q}{V_S} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) + \frac{1}{R+d}} = 14.8[\mathrm{pF}]$$

4. zadatak: Jedna polovina usamljene metalne sfere poluprečnika *a*=1[cm], naelektrisane količinom elektriciteta *Q*=1[nC], pliva u homogenom tečnom dielektriku relativne permitivnosti $\varepsilon_r = 17$, dok je druga polovina u vazduhu. Izračunati:

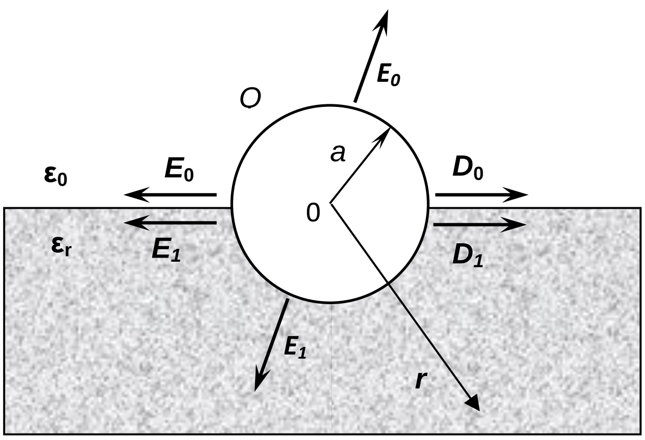
a) Jačinu električnog polja oko sfere

b) Potencijal sfere

c) Kapacitivnost sfere

Rešenje*:*

Postupajući analogno prethodnom zadatku, na slici su sa $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{D}_1$ označeni referentni smerovi vektora jačine električnog polja i pomeraja u dielektriku, a sa $\boldsymbol{E}_0$ i $\boldsymbol{D}_0$ odgovarajući vektori u vazduhu.



Primenom drugog graničnog uslova (jednakost tangencijalnih komponenti vektora jačine polja ***E*** na razdvojnoj površi) i činjenice da su vektori $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{E}_0$ paralelni razdvojnoj površi dobijamo:

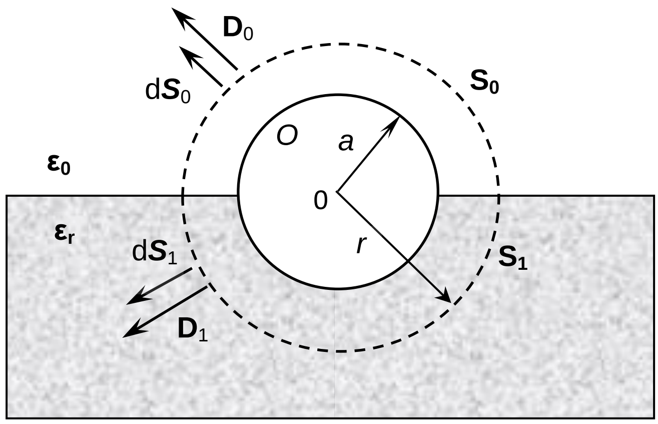
$$\boldsymbol{E}_{1tg} = \boldsymbol{E}_{0tg} \quad \wedge \quad (\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{1tg} \wedge \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{0tg}) \Rightarrow \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E} \ .$$

Dakle, vektor ***E*** se ne „prelama" pri prelasku iz dielektrika u vazduh. Jednakost vektora ***E*** u obe sredine povlači nejednakost vektora ***D*** u dielektriku, $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$ i u vazduhu $\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$.

Neka su $\boldsymbol{D} = D(r) \cdot \boldsymbol{r}_0$ i $\boldsymbol{E}(r) = E(r) \cdot \boldsymbol{r}_0$ gde je $\boldsymbol{r}_0$ jedinični vektor ***r*** ose. Primenom generalisanog Gausovog zakona $\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = Q_S$ na sfernu površ poluprečnika $r > a$, možemo odrediti intenzitet vektora ***D***. Zbog simetrije, vektor ***D***$_0$ je homogen na površini polusfere S_0 u vazduhu, a vektor ***D***$_1$ je homogen na površini polusfere S_1 u dielektriku, pa važi

$$\oint_{S=S_0 \cup S_1} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S_0} \boldsymbol{D}_0 \cdot d\boldsymbol{S}_0 + \int_{S_1} \boldsymbol{D}_1 \cdot d\boldsymbol{S}_1 =$$

$$= \int_{S_0} D_0 \cdot dS_0 + \int_{S_1} D_1 \cdot dS_1 = 2\pi r^2 (D_1 + D_0) = Q$$



Kako je $D_1(r) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E(r)$ i $D_0(r) = \varepsilon_0 E(r)$ zamenom se dobija

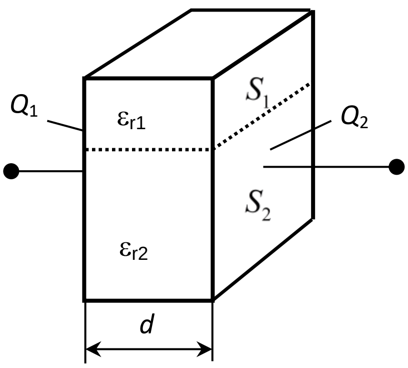
$$2\pi r^2 (D_1 + D_0) = 2\pi r^2 \varepsilon_0 E(r)(1+\varepsilon_r) = Q \ ,$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 (1+\varepsilon_r)} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad a \le r \ .$$

Unutar metalne sfere $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} = 0$, za $r < a$.

b) $V_s = V(r=a) = \int_{r=a}^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^{\infty} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)} \cdot \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)} \cdot \frac{1}{a} = 100[\mathrm{V}]$.

c) $C = \frac{Q}{V_s} = 2\pi\varepsilon_0 (1+\varepsilon_r) a = 10[\mathrm{pF}]$.

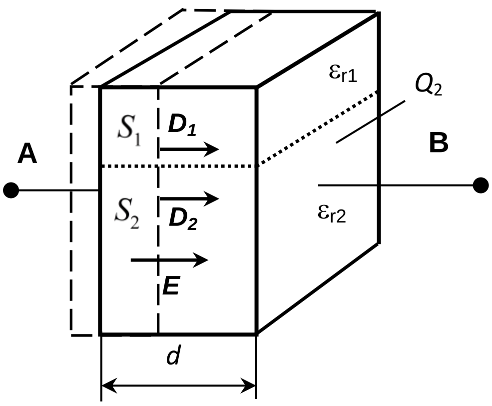


5. zadatak: Pločasti kondenzator ispunjen je sa dva dielektrika kao na slici, pri čemu je S_1=10[cm^2], S_2=15[cm^2]; d=1[mm], ε_{r1}=3 i ε_{r2}=5. Naelektrisanja ploča kondenzatora su Q_1=−Q_2=4[nC]. Odrediti:

a) Vektor jačine električnog polja u kondenzatoru.

b) Kapacitivnost ovog kondenzatora.

Rešenje:



a) Kako je razdvojna površina dielektrika normalna na ploče kondenzatora, to je vektor jačine električnog polja tangencijalan na razdvojnu površinu.

Iz drugog graničnog uslova sledi:

$$\boldsymbol{E}_{1tg} = \boldsymbol{E}_{2tg} \quad \wedge \quad (\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{1tg} \wedge \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{2tg}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E} \ .$$

Kako su oba dielektrika linearna i homogena važi:

$$\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_1 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \boldsymbol{E} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \boldsymbol{E} \ .$$

Primenom generalisanog Gausovog zakona $\oint\limits_{S=S'\cup S''} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = Q$ na zatvorenu površ *S* oblika kvadra sledi

$$\oint\limits_{S=S'\cup S''} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = \int\limits_{S'} \boldsymbol{D_1}d\boldsymbol{S_1} + \int\limits_{S''} \boldsymbol{D_2}d\boldsymbol{S_2} = Q_S = Q \text{ , odnosno } \int\limits_{S'} D_1 dS_1 + \int\limits_{S''} D_2 dS_2 = D_1S_1 + D_2S_2 = Q .$$

Ako intenzitet vektora ***D*** izrazimo preko intenziteta vektora ***E*** dobijamo

$$Q = D_1S_1 + D_2S_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}E\cdot S_1 + \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E\cdot S_2 = (\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S_1 + \varepsilon_0\varepsilon_{r2}S_2)E \text{ , odakle sledi}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot S_1 + \varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot S_2} = 43\cdot 10^3[\mathrm{V/m}] \text{ sa pravcem i smerom kao na slici.}$$

b) Da bi se odredila kapacitivnost kondenzatora, potrebno je odrediti napon između ploča kondenzatora 1 i 2, odnosno:

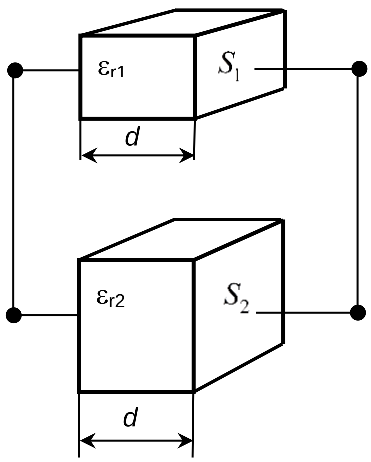
$$U_{AB} = \int\limits_0^d \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = E\cdot d = \frac{Q}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot S_1 + \varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot S_2}\cdot d = 43[\mathrm{V}]$$

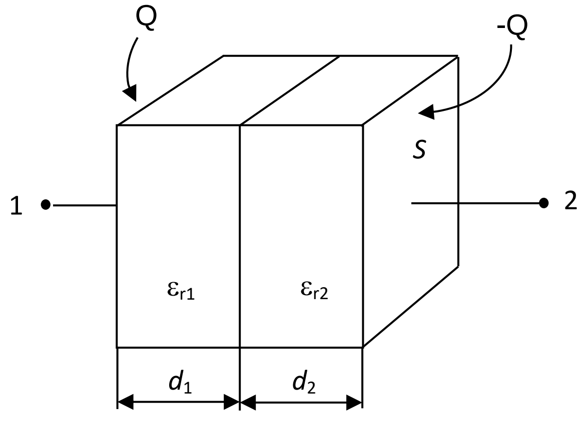
Kapacitivnost kondenzatora je onda:

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot\frac{S_1}{d} + \varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot\frac{S_2}{d} \approx 93[\mathrm{pF}]$$

Analizirajući navedeni izraz uočava se da se ovaj kondenzator može predstaviti kao paralelna veza dva pločasta kondenzatora, svaki sa homogenim dielektrikom:

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot\frac{S_1}{d} + \varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot\frac{S_2}{d} .$$





6. zadatak: U pločastom kondenzatoru površine ploča S=20[cm^2] i naelektrisanja elektroda $Q_1=-Q_2=Q$=10[nC], nalaze se dva homogena dielektrika debljine d_1=2[mm] i d_2=3[mm], kao na slici. Razdvojna površina dielektrika paralelna je pločama kondenzatora. Relativne dielektrične konstante ovih dielektrika su: ε_{r1}=3 i ε_{r2}=9. Odrediti:

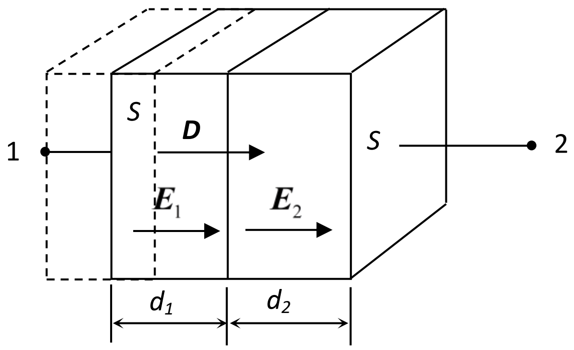
a) vektor dielektričnog pomeraja i vektor jačine električnog polja u kondenzatoru,

b) kapacitivnost ovog kondenzatora.

Rešenje:

a) Kako je razdvojna površina dielektrika paralelna pločama kondenzatora, a vektori jačine električnog polja i dielektričnog pomeraja kolinearni (linearni i homogeni dielektrici) i upravni na ploče kondenzatora, sledi da su ovi vektori upravni i na razdvojnu površinu dielektrika. Iz prvog graničnog uslova sledi

$$\boldsymbol{D}_{1n} = \boldsymbol{D}_{2n} \quad \wedge \quad (\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_{1n} \wedge \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{D}_{2n}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{D}.$$



Dakle, vektor ***D*** se ne prelama pri prelasku iz jednog u drugi dielektrik. Njegov intenzitet možemo odrediti primenom generalisanog Gausovog zakona na zatvorenu površ oblika kvadra kao u prethodnom zadatku:

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \int_S DdS = DS = Q_S = Q .$$

$D = Q/S = 5\cdot 10^{-6}[\mathrm{C/m^2}]$, sa pravcem i smerom kao na slici.

Jačine električnog polja su različite u pojedinim dielektricima:

$E_1 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} = 188\cdot 10^3[\mathrm{V/m}]$, $E_2 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} = 63\cdot 10^3[\mathrm{V/m}]$, sa pravcem i smerom kao na slici.

b) Napon između pozitivne i negativne ploče kondenzatora je:

$$U_{12} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\cdot d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\cdot d_2 \approx 564[\mathrm{V}]$$

Kapacitivnost kondenzatora je:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{D\cdot S}{D\cdot(\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}})} = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{S}{d_1}} + \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{S}{d_2}}} = 18[\mathrm{pF}]$$

Ovaj kondenzator može se zameniti rednom vezom dva kondenzatora, svaki sa homogenim dielektrikom, kapacitivnosti C_1 i C_2 :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{S}{d_1}} + \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{S}{d_2}} \ .$$