Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

02.09.2014. године

Rešenja zadataka sa pismenog dela ispita iz predmeta Matematika 1, septembar 2014. године

1. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Primenimo sledeće elementarne transformacije, da bi našli $\rho\left(\Sigma\right)$.

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 6 & \lambda-7 & 0 & 10 \\ \lambda+2 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{1}{3}\left(\lambda^2-\lambda+18\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ukoliko je $\lambda = 1$ tada je sistem oblika:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da je sistem protivurečan odnosno $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$.

Ako je $\lambda \neq 1$ tada je sistem oblika:

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{1}{3}\left(\lambda^2-\lambda+18\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\lambda^2-7\lambda+6\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Slobodni član $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ за $\lambda = 1$ ili za $\lambda = 6$. Sledi da je $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$ za $\lambda \notin \{1, 6\}$. Ukoliko je $\lambda = 6$ sistem je oblika:

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

i ima jedinstveno rešenje $\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ \left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}, -\frac{36}{5} \right) \middle| \lambda = 6 \right\}$

2. Vektor pravca prave p_2 je kolinearan sa vektorom

$$
\vec{p_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} = (2, 1, 3)
$$

Uočimo bilo koju tačku sa prave p_1, na primer $M_0(-2, 0, 1)$. Tačka mora pripadati ravni α. Kako je vektor normale na ravan α

$$
\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},
$$

to njena je jednačina glasi

$$
-4(x+2) + 2y + 2(z-1) = 0. \; -4x + 2y + 2z - 10 = 0.
$$

3. Domen date funkcije je skup svih realnih brojeva za koje važi $x^2 - 2 \geq 0$, odnosno $|x| \geq \sqrt{2}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \bigcup [\sqrt{2}, +\infty)$. Eventulne nule tražimo iz uslova $\sqrt{x^2-2} + x = 0$, $\sqrt{x^2-2} =$

$-x$, $x^2 = x^2 - 2$, što očito nema rešenja. Vrednost $\sqrt{x^2-2}+x$ je pozitivna svakako kad god je $x \geq 0$ (jer ono što je pod korenom ne može biti negativno), dok u slučaju $x \leq 0$ imamo

$$\sqrt{x^2-2} + x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2} \geq -x \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq x^2,$$

što očito nije tačno. Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$ i $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$.

U "$+\infty$"važi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2} + \lim_{x\to+\infty} x = +\infty + \infty = +\infty,$$

tako da u ovom slučaju nema horizonatalne asimptote (zato treba da ispitamo i postojanje kose asimptote). Dalje,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}} = 1 + 1 = 2,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2-2}+x} = 0,$$

što znači da data funkcija u "$+\infty$"ima kosu asimptotu $y = 2x$.

U "$-\infty$"važi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2} + x\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{t^2-2} - t\right) = 0$$

(uvedena je smena $t = -x$) na osnovu malopre dobijenog rezultata, što znači da u "$-\infty$"ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ (x-*osa*). Zato egzistenciju kose asimptote nema potrebe ispitivati.

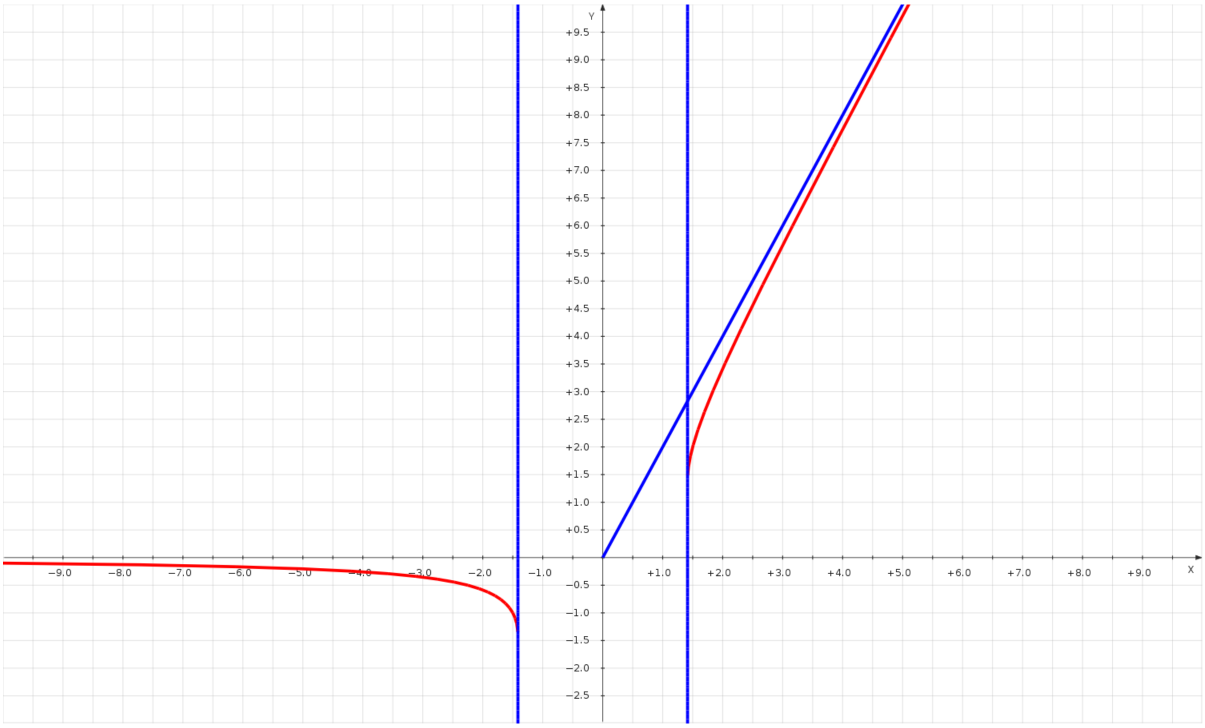
Vertikalnih asimptota je jasno da ne može biti.

Prvi izvod, $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$, je pozitivan ako i samo ako važi $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}} > -1$, što očito uvek važi za $x > 0$, dok za $x < 0$ ovo, odnosno $\dfrac{x^2}{x^2-2} < 1$ (prilikom kvadriranja nejednačine u kojoj su obe strane negativne - menja se znak!), nikad ne važi u domenu $x^2 - 2 \geq 0$ date funkcije. Dakle, $f'(x) > 0$ i $f(x)$ raste za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$, a $f'(x) < 0$ i $f(x)$ opada za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$ ($f'(x)$ nikad nije jednako 0).

Drugi izvod,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[x\left(x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x + \left(x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^2}{(x^2-2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2-2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-x^2 + x^2 - 2}{(x^2-2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{(x^2-2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

je očito uvek strogo manji od 0, odnosno funkcija $f(x)$ je konkavna na celom svom domenu.



4. Važno je uočiti $D_{\vec{r}} = D_x \cap D_y \cap D_z = (0, +\infty)$. Kako je krivina krive jednaka:

$$K = \frac{|\,\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\,|}{|\,\dot{\vec{r}}\,|^3}$$

potrebno je izračunati:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= \left(1 - \frac{1}{t^2}, 1 + \frac{1}{t^2}, \frac{2}{t}\right) \\
\ddot{\vec{r}} &= \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^2}\right) \\
\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \dfrac{1}{t^2} & 1 + \dfrac{1}{t^2} & \dfrac{2}{t} \\ \dfrac{2}{t^3} & -\dfrac{2}{t^3} & -\dfrac{2}{t^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{t^2}\left(-1 + \frac{1}{t^2}, 1 + \frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t}\right)
\end{aligned}$$

Izračunajmo intezitete potrebnih vektora:

$$|\,\dot{\vec{r}}\,| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t}\right)^2} = \sqrt{2}\left|1 + \frac{1}{t^2}\right| = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
|\,\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\,| &= \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\right)^2\left(-1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^2}\right)^2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^2}\right)^2\left(-\frac{2}{t}\right)^2} \\
&= \left|\frac{2}{t^2}\right| \cdot \sqrt{2}\left|1 + \frac{1}{t^2}\right| \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{t^2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)
\end{aligned}$$

Konačno se dobija krivina krive kao funkcija od t:

$$K = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{t^2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{2\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^3} = \frac{1}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Da bi pronašli ekstremalnu krivinu krive, neophodno je pronaći prvi izvod krivine:

$$K' = \frac{2t\left(t^2+1\right)^2 - t^2 \cdot 2 \cdot \left(t^2+1\right) \cdot 2t}{\left(t^2+1\right)^4} = \frac{2t^3+2t-4t^3}{\left(t^2+1\right)^3} = 2\frac{t\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^3}$$

Nule prvog izvoda su:

$$K' = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t^2 = 1 \Rightarrow t = 0 \vee t = -1 \vee t = 1 \Rightarrow t = 1$$

jer je $1 \in D_{\vec{r}}$. Slično iz $K' > 0$ za $-1 < t < 1 \Rightarrow 0 < t < 1$ sledi da je maksimum krivine krive u $t = 1$ odnosno u tački $\dot{\vec{r}}(1) = M\left(2,0,0\right)$. Vrednost krivine krive za $t = 1$ je:

$$K\left(1\right) = \frac{1^2}{\left(1^2+1\right)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{K} = 4$$

odakle je jednačina tražene lopte:

$$\left(x-2\right)^2 + \left(y-0\right)^2 + \left(z-0\right)^2 = 4^2 \Rightarrow \left(x-2\right)^2 + y^2 + z^2 = 4^2$$

prof. dr Slobodan Radojević
doc. dr Aleksandar Pejčev