Dinamika krutog tela

Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela

Slobodno telo ima šest stepeni slobode: tri koordinate pola translacije i tri Ojlerova ugla. U dinamici tela pogodno je da se za pol translacije uzeti centar masa *C*. Za rešavanje osnovnih zadataka dinamike potrebno je napisati šest jednačina koje povezuju nezavisne parametre i sile koje deluju na telo. Te jednačine su

$$\dot{\vec{K}} = m\dot{\vec{V}}_C = \vec{F}_R^s, \quad m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s. \qquad \text{(A)}$$

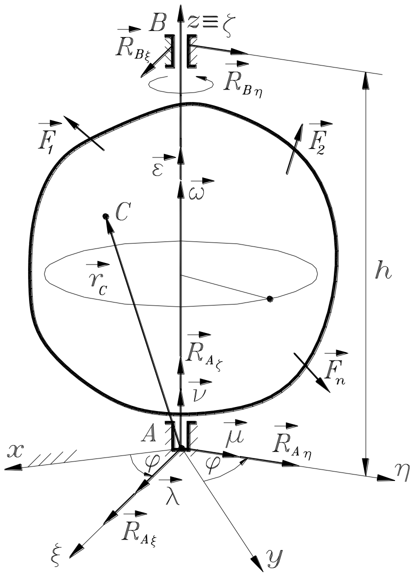
Diferencijalne jednačine translatornog kretanja tela

Ako se u tački *O* tela ($\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C$), koje se kreće translatorno, postavi Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*, koristeći diferencijalnu jednačinu kretanja središta masa, dobija se

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad m\ddot{z}_C = Z_R^s.$$

Kako kod translatornog kretanja tela važi da je: $\vec{\omega} = 0$, $\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s$, i kako je $L_{Cz} = J_{Cz}\omega_z$, sledi da je $\vec{M}_C^s = 0$. Na osnovu toga je $M_{Cx}^s = 0$, $M_{Cy}^s = 0$ i $M_{Cz}^s = 0$. Ove jednačine nazivaju se uslovima kompatibilnosti i služe da se odrede nepoznate sile koje deluju na telo, da bi kretanje bilo translatorno.

Diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose



Telo koje se obrće oko nepokretne ose ima jedan stepen slobode i njegov položaj određen je uglom obrtanja φ. Diferencijalne jednačine kretanja tela su $m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s$ i $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A^s$. Ove jednačine pogodno je projektovati na ose pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$, jer se položaj centra masa i vrednosti momenata inercije tela, ne menjaju. Neka na telo deluje sistem od *n* aktivnih sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ i reakcije veza

$$\vec{R}_A = R_{A\xi}\vec{\lambda} + R_{A\eta}\vec{\mu} + R_{A\zeta}\vec{\nu} \text{ i } \vec{R}_B = R_{B\xi}\vec{\lambda} + R_{B\eta}\vec{\mu}.$$

Izvod vektora, koji je određen u odnosu na ose pokretnog trijedra, ima dva člana, relativni (lokalni) i prenosni, pa je

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d_r\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}, \quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_A.$$

Sada vektorske diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose postaju

$$\frac{d_r\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{F}_R^a + \vec{R}_A + \vec{R}_B, \quad \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_A = \vec{M}_A^a + \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A(\vec{R}_B).$$

Polazeći od

$$\vec{K} = K_\xi\vec{\lambda} + K_\eta\vec{\mu} + K_\zeta\vec{\nu}, \quad \frac{d_r\vec{K}}{dt} = \frac{dK_\xi}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dK_\eta}{dt}\vec{\mu} + \frac{dK_\zeta}{dt}\vec{\nu},$$

$$\vec{K} = m\vec{V}_C = m(\vec{\omega} \times \vec{r}_C) = m\begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = -m\omega_z\eta_C\vec{\lambda} + m\omega_z\xi_C\vec{\mu},$$

dobija se da je $\dfrac{d_r\vec{K}}{dt} = -m\varepsilon_z\eta_C\vec{\lambda} + m\varepsilon_z\xi_C\vec{\mu}$, jer je $\dot{\xi}_C = \dot{\eta}_C = 0$. Drugi član je

$$\vec{\omega}\times\vec{K} = \omega_z\vec{v}\times\vec{K} = \omega_z\vec{v}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r}_C) = m\omega_z\vec{v}\times\left(-\omega_z\eta_C\vec{\lambda} + \omega_z\xi_C\vec{\mu}\right) = m\omega_z^2\begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v}\\ 0 & 0 & 1\\ -\eta_C & \xi_C & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{K} = -m\omega_z^2\xi_C\vec{\lambda} - m\omega_z^2\eta_C\vec{\mu}.$$

Koristeći definiciju momenta količine kretanja, za kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose je

$$\vec{L}_A = \int_V\left(\vec{r}\times\vec{V}\right)dm = \int_V\left(\vec{r}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right)dm = \vec{\omega}\int_V\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)dm - \int_V\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\vec{\omega}\right)dm$$

$$\vec{L}_A = \omega_z\vec{v}\int_V\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)dm - \omega_z\int_V\left(\xi\zeta\vec{\lambda} + \eta\zeta\vec{\mu} + \zeta^2\vec{v}\right)dm,$$

$$L_{A\xi} = -\omega_z\int_V\xi\zeta dm = -\omega_z J_{\xi\zeta},\ L_{A\eta} = -\omega_z\int_V\eta\zeta dm = -\omega_z J_{\eta\zeta},$$

$$L_{A\zeta} = \omega_z\int_V\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta^2\right)dm = \omega_z J_{\zeta},$$

pa su lokalni izvodi

$$\dot{L}_{A\xi} = -\varepsilon_z J_{\xi\zeta},\quad \dot{L}_{A\eta} = -\varepsilon_z J_{\eta\zeta},\quad \dot{L}_{A\zeta} = \varepsilon_z J_{\zeta},$$

i

$$\vec{\omega}\times\vec{L}_A = \begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v}\\ 0 & 0 & \omega_z\\ -\omega_z J_{\xi\zeta} & -\omega_z J_{\eta\zeta} & \omega_z J_{\zeta}\end{vmatrix} = \omega_z^2 J_{\eta\zeta}\vec{\lambda} - \omega_z^2 J_{\xi\zeta}\vec{\mu}.$$

Momenti reakcija veza, za tačku *A*, su

$$\vec{M}_A\left(\vec{R}_A\right) = 0,\ \vec{M}_A\left(\vec{R}_B\right) = \vec{r}_B\times\vec{R}_B = \begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v}\\ 0 & 0 & h\\ R_{B\xi} & R_{B\eta} & 0\end{vmatrix} = -hR_{B\eta}\vec{\lambda} + hR_{B\xi}\vec{\mu}.$$

Kako je $\vec{\omega} = \omega_z\vec{v} = \dot{\varphi}\vec{v}$, i $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z\vec{v} = \ddot{\varphi}\vec{v}$, skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose su

$$\begin{aligned}
-m\ddot{\varphi}\eta_C - m\dot{\varphi}^2\xi_C &= F^a_{R\xi} + R_{A\xi} + R_{B\xi},\\
m\ddot{\varphi}\xi_C - m\dot{\varphi}^2\eta_C &= F^a_{R\eta} + R_{A\eta} + R_{B\eta},\\
0 &= F^a_{R\zeta} + R_{A\zeta},\\
-\ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= M^a_{A\xi} - hR_{B\eta},\\
-\ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} &= M^a_{A\eta} + hR_{B\xi},\\
J_{\zeta}\ddot{\varphi} &= M^a_{A\zeta}.
\end{aligned}\qquad\text{(B)}$$

Koristeći jednačine (A) ($m\vec{a}_C = \vec{F}^s_R$, $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}^s_A$), kao i jednačine koje izražavaju Dalamberov princip za materijalni sistem ($\vec{F}^s_R + \vec{F}^{in}_R = 0$, $\vec{M}^s_A + \vec{M}^{in}_A = 0$), skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose mogu se napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
F_{R\xi}^{a} + R_{A\xi} + R_{B\xi} + F_{R\xi}^{in} &= 0,\\
F_{R\eta}^{a} + R_{A\eta} + R_{B\eta} + F_{R\eta}^{in} &= 0,\\
F_{R\zeta}^{a} + R_{A\zeta} + F_{R\zeta}^{in} &= 0,\\
M_{A\xi}^{a} - hR_{B\eta} + M_{R\xi}^{in} &= 0,\\
M_{A\eta}^{a} + hR_{B\xi} + M_{R\eta}^{in} &= 0,\\
M_{A\zeta}^{a} + M_{R\zeta}^{in} &= 0.
\end{aligned}
\qquad \text{(C)}
$$

Poređenjem jednačina (B) i (C), projekcije glavnog vektora i glavnog momenta sila inercije, tela koje se obrće oko nepokretne ose, na ose pokretnog koordinatnog sistema su

$$
F_{R\xi}^{in} = m\ddot{\varphi}\eta_C + m\dot{\varphi}^2\xi_C, \quad F_{R\eta}^{in} = -m\ddot{\varphi}\xi_C + m\dot{\varphi}^2\eta_C, \quad F_{R\zeta}^{in} = 0,
$$
$$
M_{A\xi}^{in} = \ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta}, \quad M_{A\eta}^{in} = \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta}, \quad M_{A\zeta}^{in} = -J_{\zeta}\ddot{\varphi}.
$$

Određivanje reakcija u ležištima tela koje se obrće oko nepokretne ose

Reakcije u ležištima tela koje se obrće oko nepokretne ose, koje su određene iz prvih pet jednačina u (B) i (C), mogu se prikazati i na sledeći način

$$
\vec{R}_A = \vec{R}_A^{st} + \vec{R}_A^{d}, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^{st} + \vec{R}_B^{d},
$$
$$
R_{A\xi} = R_{A\xi}^{st} + R_{A\xi}^{d}, \; R_{A\eta} = R_{A\eta}^{st} + R_{A\eta}^{d}, \; R_{A\zeta} = R_{A\zeta}^{st} + R_{A\zeta}^{d},
$$
$$
R_{B\xi} = R_{B\xi}^{st} + R_{B\xi}^{d}, \; R_{B\eta} = R_{B\eta}^{st} + R_{B\eta}^{d}.
$$

Statičke reakcije bi se pojavile i onda kada veze ne dozvoljavaju obrtanje, a dinamičke reakcije su posledica obrtanja tela. Jednačine pomoću kojih se mogu odrediti statičke i dinamičke reakcije veza su

$$
\begin{aligned}
F_{R\xi}^{a} + R_{A\xi}^{st} + R_{B\xi}^{st} &= 0, & R_{A\xi}^{d} + R_{B\xi}^{d} + m\ddot{\varphi}\eta_C + m\dot{\varphi}^2\xi_C &= 0,\\
F_{R\eta}^{a} + R_{A\eta}^{st} + R_{B\eta}^{st} &= 0, & R_{A\eta}^{d} + R_{B\eta}^{d} - m\ddot{\varphi}\xi_C + m\dot{\varphi}^2\eta_C &= 0,\\
F_{R\zeta}^{a} + R_{A\zeta}^{st} &= 0, & R_{A\zeta}^{d} &= 0,\\
M_{A\xi}^{a} - hR_{B\eta}^{st} &= 0, & -hR_{B\eta}^{d} + \ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= 0,\\
M_{A\eta}^{a} + hR_{B\xi}^{st} &= 0. & hR_{B\xi}^{d} + \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} &= 0.
\end{aligned}
$$

Oslovi dinamičke uravnoteženosti tela koje se obrće oko nepokretne ose

Telo koje se obrće oko nepokretne ose biće dinamički uravnoteženo ako su dinamičke reakcije veza jednake nuli, tj.

$$
R_{A\xi}^{d} = R_{A\eta}^{d} = R_{B\xi}^{d} = R_{B\eta}^{d} = 0.
$$

Koristeći prethodne jednačine, dobijaju se dva para linearnih homogenih algebarskih jednačina

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi}\eta_C + \dot{\varphi}^2\xi_C &= 0, & \ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= 0, & \dot{\varphi}^2\xi_C + \ddot{\varphi}\eta_C &= 0, & \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} + \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} &= 0,\\
-\ddot{\varphi}\xi_C + \dot{\varphi}^2\eta_C &= 0, & \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} &= 0, & -\ddot{\varphi}\xi_C + \dot{\varphi}^2\eta_C &= 0, & -\ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= 0,
\end{aligned}
$$

gde su nepoznate ξ_C, η_C, $J_{\xi\zeta}$ i $J_{\eta\zeta}$. Determinanta oba sistema jednačina je

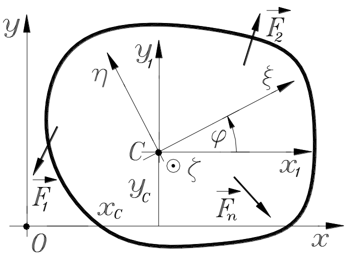
$$
\begin{vmatrix} \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ -\ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2 \neq 0,
$$

pa sistemi jednačina nemaju drugih rešenja, osim trivijalnog, tj.

$$
\xi_C = \eta_C = 0 \qquad J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0.
$$

To znači, da bi telo koje se obrće oko nepokretne ose bilo dinamički uravnoteženo, treba da se centar masa tela nalazi na osi obrtanja i da osa obrtanja bude glavna osa inercije, pa odatle sledi da ta osa treba da bude glavna centralna osa. Praktična realizacija dinamičke uravnoteženosti postiže se dodavanjem ili oduzimanjem masa.

Diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela



Telo koje vrši ravno kretanje ima tri stepena slobode. Razlažući ravno kretanje na translatorno i obrtno, može se reći da se ovo kretanje sastoji od translatornog sa polom translacije u centru masa *C* i obrtnog kretanja oko ose koja prolazi kroz pol *C*, a upravna je na ravnu figuru. Koristeći osnovne jednačine kretanja tela

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s,$$

skalarne diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela su

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \qquad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \qquad J_{C\zeta}\ddot{\varphi} = M_{C\zeta}^s,$$

koje omogućavaju rešavanje oba zadatka dinamike.
U nekim slučajevima, kada je poznata putanja centra masa *C*, pogodno je koristiti ose prirodnog trijedra. Tada su skalarne diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela date sa

$$m\frac{dV_C}{dt} = F_{Rt}^s, \quad m\frac{V_C^2}{R_K} = F_{Rn}^s, \quad J_{C\zeta}\ddot{\varphi} = M_{C\zeta}^s.$$

Diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke

Neka se telo obrće oko nepokretne tačke *O*. U ovom slučaju, diferencijalne jednačine dobijaju se primenom teoreme o promeni momenta količine kretanja za nepokretni pol. Zakon o kretanju centra masa ovde se može iskoristiti za određivanje reakcija veza u nepokretnom polu. Diferencijalna jednačina je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^s.$$

Za dobijanje skalarnih diferencijalnih jednačina najpogodnije je koristiti pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$, kruto vezan za telo, jer se za te ose ne menjaju momenti inercije tela. U tom slučaju je

$$\vec{L}_O = L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu},$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + L_{O\xi}\dot{\vec{\lambda}} + L_{O\eta}\dot{\vec{\mu}} + L_{O\zeta}\dot{\vec{\nu}}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega}\times\vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega}\times\vec{\mu}, \quad \dot{\vec{\nu}} = \omega\times\vec{\nu},$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + L_{O\xi}\left(\vec{\omega}\times\vec{\lambda}\right) + L_{O\eta}\left(\vec{\omega}\times\vec{\mu}\right) + L_{O\zeta}\left(\vec{\omega}\times\vec{\nu}\right),$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \left(\vec{\omega}\times L_{O\xi}\vec{\lambda}\right) + \left(\vec{\omega}\times L_{O\eta}\vec{\mu}\right) + \left(\vec{\omega}\times L_{O\zeta}\vec{\nu}\right),$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \vec{\omega}\times\left(L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu}\right),$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \vec{\omega}\times\vec{L}_O,$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ L_{O\xi} & L_{O\eta} & L_{O\zeta} \end{vmatrix},$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} +$$
$$\vec{\lambda}\left(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right) + \vec{\mu}\left(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right) + \vec{\nu}\left(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right),$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \left[\frac{dL_{O\xi}}{dt} + \left(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right)\right]\vec{\lambda} + \left[\frac{dL_{O\eta}}{dt} + \left(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right)\right]\vec{\mu} +$$
$$+\left[\frac{dL_{O\zeta}}{dt} + \left(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right)\right]\vec{\nu} = \vec{M}_O^s.$$

Odavde sledi

$$\frac{dL_{O\xi}}{dt} + \left(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right) = M_{O\xi}^s,$$
$$\frac{dL_{O\eta}}{dt} + \left(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right) = M_{O\mu}^s,$$
$$\frac{dL_{O\zeta}}{dt} + \left(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right) = M_{O\zeta}^s.$$

Ako su ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$ glavne ose inercije tela, skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke su

$$J_{O\xi}\frac{d\omega_\xi}{dt} + \left(J_{O\zeta} - J_{O\eta}\right)\omega_\eta\omega_\zeta = M_{O\xi}^s,$$
$$J_{O\eta}\frac{d\omega_\eta}{dt} + \left(J_{O\xi} - J_{O\zeta}\right)\omega_\xi\omega_\zeta = M_{O\eta}^s,$$
$$J_{O\zeta}\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \left(J_{O\eta} - J_{O\xi}\right)\omega_\eta\omega_\xi = M_{O\zeta}^s,$$

koje se nazivaju Ojlerove dinamičke jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke. One predstavljaju sistem od tri nelinearne spregnute jednačine po ω_ξ, ω_η i ω_ζ. Ukoliko je moguće rešiti prethodni sistem jednačina i odrediti

$$\omega_\xi = \omega_\xi(t), \quad \omega_\eta = \omega_\eta(t), \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t),$$

tada se korišćenjem Ojlerovih kinematičkih jednačina

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

u nekim slučajevima, uz zadate početne uslove kretanja, mogu odrediti konačne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Ovde je razmatran opšti slučaj delovanja spoljašnjih sila. U tom slučaju ne postoje opšti integrali prethodnih diferencijalnih jednačina. Ako je telo teško i težina tela jedina aktivna sila postoje Ojlerov, Lagranžev i slučaj Kovalevske, u kojima se mogu odrediti rešenja diferencijalnih jednačina obrtanja tela oko nepokretne tačke.

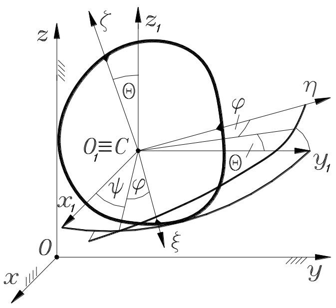
Diferencijalne jednačine opšteg kretanja tela

Koristeći osnovne jednačine kretanja tela

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s$$

prve tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja tela su

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad m\ddot{z}_C = Z_R^s,$$



a ako su ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$ glavne ose inercije tela, slede tri Ojlerove jednačine

$$J_{O\xi}\frac{d\omega_\xi}{dt} + \left(J_{O\zeta} - J_{O\eta}\right)\omega_\eta\omega_\zeta = M_{O\xi}^s,$$

$$J_{O\eta}\frac{d\omega_\eta}{dt} + \left(J_{O\xi} - J_{O\zeta}\right)\omega_\xi\omega_\zeta = M_{O\eta}^s,$$

$$J_{O\zeta}\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \left(J_{O\eta} - J_{O\xi}\right)\omega_\eta\omega_\xi = M_{O\zeta}^s,$$

Ove jednačine predstavljaju sistem od šest diferencijalnih jednačina koje opisuju opšte kretanje tela. Prvim integraljenjem ovog sistema jednačina dobija se

$$x_C = x_C(t), \qquad \omega_\xi = \omega_\xi(t),$$

$$y_C = y_C(t), \qquad \omega_\eta = \omega_\eta(t),$$

$$z_C = z_C(t), \qquad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t).$$

Korišćenjem Ojlerovih kinematičkih jednačina

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

mogu se (u nekim sličajevima) dobiti rešenja

$$x_C = x_C(t), \qquad \psi = \psi(t),$$

$$y_C = y_C(t), \qquad \theta = \theta(t),$$

$$z_C = z_C(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$