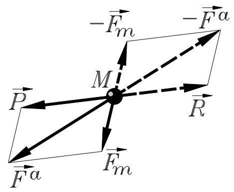
Dalamberov princip za tačku

U cilju proučavanja kretanja neslobodne tačke Dalamber je formulisao princip koristeći termin "izgubljene sile" $\vec{P}$. Ova sila tački ne saopštava ubrzanje već je potrebna da uravnoteži dejstvo veze na tačku. Njegova formulacija principa glasi



$$\vec{P}+\vec{R}=0,$$

gde je $\vec{R}$ - dopunska sila koja je posledica postojanja veze (reakcija veze). Pri tome je

$$\vec{P}+\vec{F}_m=\vec{F}^a,$$

gde je za $\vec{F}_m$ korišćen termin motorne sile, a sa $\vec{F}^a$ je označena rezultanta svih aktivnih sila koje deluju na posmatranu tačku. Kako

$$\vec{P}+\vec{R}=\vec{F}^a-\vec{F}_m+\vec{R}=0,$$

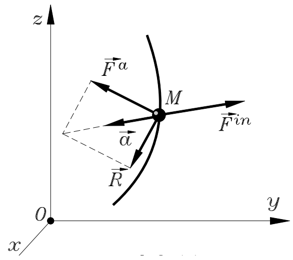
i uzimajući da je $\vec{F}_m=m\vec{a}$, dobija se

$$\vec{F}^a+(-m\vec{a})+\vec{R}=0.$$

Ova jednačina razlikuje se od jednačine ravnoteže sistema sučeljnih sila za član $-m\vec{a}$ koji ima dimenziju sile i koja se naziva inercijalna sila (u Dalamberovom smislu), a obeležava se sa $\vec{F}^{in}$, tj. $\vec{F}^{in}=-m\vec{a}$. Sledi da je

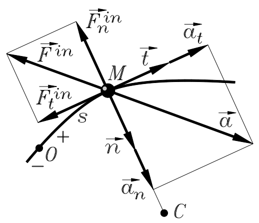
$$\vec{F}^a+\vec{F}^{in}+\vec{R}=0,$$

što predstavlja savremenu formulaciju Dalamberovog principa za neslobodnu tačku, koji glasi: ako se u svakom trenutku aktivnim silama i reakcijama veza koje deluju na tačku pridoda sila inercije, vektorski zbir tih sila biće jednak nuli.



Odgovarajuće skalarne diferencijalne jednačine su:

$$X^a+R_x+X^{in}=0,\quad X^{in}=-ma_x=-m\ddot{x},$$
$$Y^a+R_y+Y^{in}=0,\quad Y^{in}=-ma_y=-m\ddot{y},$$
$$Z^a+R_z+Z^{in}=0,\quad Z^{in}=-ma_z=-m\ddot{z}.$$



$$F_t^a+R_t+F_t^{in}=0,\quad F_t^{in}=-ma_t=-m\ddot{s},$$
$$F_n^a+R_n+F_n^{in}=0,\quad F_n^{in}=-ma_n=-m\frac{\dot{s}^2}{R_K},$$
$$F_b^a+R_b+F_b^{in}=0,\quad F_b^{in}=0.$$

Prethodni sistemi jednačina samo su formalno slični uslovima ravnoteže tačke, jer je u statici reč o algebarskim jednačinama, a u ovom slučaju u pitanju su diferencijalne jednačine.

Dalamberov princip za materijalni sistem

Neka je dat materijalni sistem koji se sastoji od n tačaka, odgovarajućih masa m_i, $i=1,2,...,n$. Koristeći princip oslobađanja od veza, spoljašnje i unutrašnje veze mogu se zameniti odgovarajućim reakcijama veza. Tada materijalni sistem postaje slobodan, a na i – tu reprezentativnu tačku deluju spoljašnje sile $\vec{F}_i^s$ (aktivne sile i spoljašnje reakcije veza) i unutrašnje sile $\vec{F}_i^u$. Ako se tim silama pridodaju i inercijalne $\vec{F}_i^{in} = -m_i \vec{a}_i$, tada, na osnovu Dalamberovog principa, za svaku tačku sistema važi

$$\vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u + \vec{F}_i^{in} = 0 .$$

Sabiranjem jednačina koje važi za svaku tačku, dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^u + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{in} = 0 , \qquad \vec{F}_R^s + \vec{F}_R^{in} = 0 ,$$

gde je: $\vec{F}_R^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^s$ - glavni vektor spoljašnjih sila, $\vec{F}_R^{in} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{in}$ - glavni vektor sila inercije, a glavni vektor unutrašnjih sila je $\vec{F}_R^u = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^u = 0$. Predhodna jednačina predstavlja prvu vektorsku jednačinu Dalamberovog principa za vezani sistem.

Ako su položaji tačaka sistema određeni vektorima položaja $\vec{r}_i$, u odnosu na pol *O*, tada je

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^u + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in} = 0 , \quad \vec{M}_O^s + \vec{M}_O^{in} = 0 ,$$

gde je: $\vec{M}_O^s = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s$ - glavni moment svih spoljašnjih sila, $\vec{M}_O^u = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^u = 0$ i $\vec{M}_O^{in} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{in}$ - glavni moment sila inercije svih tačaka sistema. Predhodna jednačina predstavlja drugu vektorsku jednačinu Dalamberovog principa za vezani sistem.

Ako se u izabranom polu *O* postavi Dekartov koordinatni sistem *Oxyz,* tada se projektovanjem na ose dobija

$$X_R^s + X_R^{in} = 0, \qquad M_{Ox}^s + M_{Ox}^{in} = 0,$$
$$Y_R^s + Y_R^{in} = 0, \qquad M_{Oy}^s + M_{Oy}^{in} = 0,$$
$$Z_R^s + Z_R^{in} = 0, \qquad M_{Oz}^s + M_{Oz}^{in} = 0.$$

Poređenjem prve i druge vektorske jednačine Dalamberovog principa, $\vec{F}_R^s + \vec{F}_R^{in} = 0$ i $\vec{M}_O^s + \vec{M}_O^{in} = 0$, sa jednačinama koje izražavaju teoremu o kretanju centra masa i teoremu o promeni kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol ili centar masa, $\dot{\vec{K}} = m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s$ i $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^s$, dobija se

$$\vec{F}_R^{in} = -\vec{F}_R^s = -m\vec{a}_C = -\dot{\vec{K}} , \quad \vec{M}_O^{in} = -\vec{M}_O^s = -\dot{\vec{L}}_O ,$$

tj., glavni vektor sila inercije sistema jednak je inercijalnoj sili centra masa, odnosno, negativnom izvodu po vremenu količine kretanja sistema, a glavni moment sila inercije sistema u odnosu na nepokretni pol ili centar masa jednak je negativnom izvodu po vremenu kinetičkog momenta sistema u odnosu na isti pol.