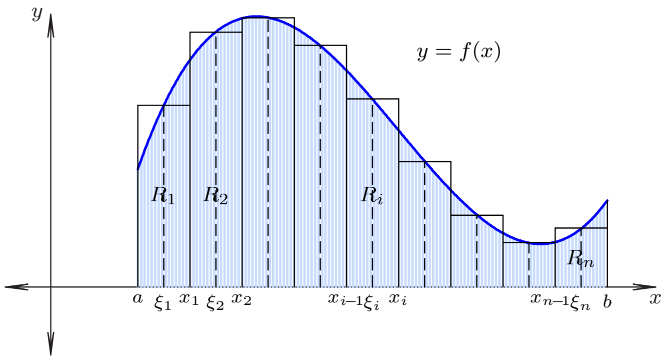
2 Интеграли - одређени, несвојствени, примене

2.1 Одређени интеграл

Нека је $f(x)$ непрекидна и ненегативна функција дефинисана на затвореном интервалу $[a,b]$. Желимо да нађемо површину дела равни S омеђену функицијом $y=f(x)$, x-осом и правама $x=a$ и $x=b$.



Поделимо интервал $[a,b]$ у n подинтервала дефинисаних тачкама $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. Означимо овакву поделу интервала са P. Дужина подинтервала $[x_{i-1},x_i]$ је $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, па су у општем случају ови подинтервали различите дужине. Дужина највећег поинтервала представља дијаметар поделе P и означава са $\|P\|$,

$$\|P\|=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n\}.$$

Нека су $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ изабране тачке. Тада површину S апроксимирамо збиром површина правоугаоника R_i,

$$S\approx\Delta x_1 f(\xi_1)+\Delta x_2 f(\xi_2)+\cdots+\Delta x_n f(\xi_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ову суму називамо *Римановом сумом.*

Када подела P тежи „најфинијој могућој", тј. када $\|P\|\to 0$, добијамо

$$S=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ако овај лимес постоји и ако је коначан за ма какву поделу P, зваћемо га *одређени интеграл у Римановом смислу функције* $f(x)$ у границама од a до b и означаваћемо га са

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

У том случају кажемо да је функција $f(x)$ интеграбилна на интервалу $[a,b]$. Да би произвољна функција била интеграбилна на неком интервалу $[a,b]$, довољно је да је непрекидна на њему, или да има коначан број прекида I врсте.

Важније особине одређеног интеграла:

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0;$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\quad(a<c<b);$

- ако је f парна функција, важи $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$;

- ако је f непарна функција, важи $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

- $\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Теорема 2.1. (Њутн-Лајбницова формула.) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$, тада на том интервалу постоји неодређени интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ ($C = \mathrm{const}$) и важи

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Теорема 2.2. (Смена променљиве код одређеног интеграла.) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$ и $x = \varphi(t)$ непрекидна заједно са својим изводом $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$, где је $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Теорема 2.3. (Парцијална интеграција код одређеног интеграла.) Ако су функције $u = u(x)$ и $v = v(x)$ диференцијабилне на одсечку $[a, b]$, тада је

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

Пример 2.1. Израчунати $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3 + \cos x}$.

$$I = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 2.2. Израчунати интеграл $\int_0^1 x^2 \ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x$.

Овде користимо парцијалну интеграцију:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2\ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(1+3x^2) & \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{6x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(1+3x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^4}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{9x^4 - 1 + 1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 (3x^2-1)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}x = t \\ \sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}(x^3 - x)\Big|_0^1 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,32774.
\end{aligned}$$

Пример 2.3. Израчунати интеграл $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x\,\mathrm{d}x}{(\ln x + 2)^2}$.

$$\begin{aligned}
I &= \begin{bmatrix} \ln x = t, \ x = e^t \\ \mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{t^2 e^t\,\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = \begin{bmatrix} u = t^2 e^t & \mathrm{d}v = \mathrm{d}t/(t+2)^2 \\ \mathrm{d}u = (2t + t^2)e^t\,\mathrm{d}t & v = -1/(t+2) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^2 e^t}{t+2}\Big|_0^1 + \int_0^1 t e^t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = t & \mathrm{d}v = e^t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & v = e^t \end{bmatrix} = -\frac{e}{3} + te^t\Big|_0^1 - e^t\Big|_0^1 = -\frac{e}{3} + 1.
\end{aligned}$$

Пример 2.4. Израчунати $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos 2x)^{3/2} \cos x \, \mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\pi/4} (1-2\sin^2 x)^{3/2} \cos x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2t^2)^{3/2} \, \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}t = \sin u \\ \sqrt{2} \, \mathrm{d}t = \cos u \, \mathrm{d}u \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 u)^{3/2} \cos u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2u}{2} \right)^2 \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2u + \frac{1+\cos 4u}{2} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2}u + \sin 2u + \frac{\sin 4u}{8} \right) \bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Пример 2.5. Израчунати $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x$.

Показано је код неодређених интеграла да је

$$\int \sin^n x \, \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n},$$

па је

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} \bigg|_0^{\pi/2} = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

при чему је

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x \bigg|_0^{\pi/2} = 1.$$

За $n = 2k$ важи

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Слично, за $n = 2k+1$ важи

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Пример 2.6. Наћи $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin 153x}{\sin x} \, \mathrm{d}x$.

Означимо $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{x} \, \mathrm{d}x$ и пођимо од израза $I_n - I_{n-2}$. Ако искористимо формулу $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, тај израз се своди на

$$I_n - I_{n-2} = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n-1} \sin(n-1)x \bigg|_0^{\pi} = 0,$$

па је $I_n = I_{n-2}$. У нашем случају је $I_{153} = I_{151} = \cdots = I_1 = \int_0^{\pi} dx = \pi$.

2.2 Несвојствени интеграл

Постоје две врсте несвојствених интеграла:

(1) Интеграл неограничене функције (несвојствени интегрла прве врсте)

Ако је $f(x)$ неограничена у тачки $c \in [a,b]$ и непрекидна за $x \in [a,c) \cup (c,b]$, тада је

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x + \lim_{\delta \to 0+} \int_{c+\delta}^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

(2) Интеграл са бесконачним границама (несвојствени интеграл друге врсте).

Ако је $f(x)$ непрекидна за $x \in [a, +\infty)$, важи

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Аналогно се дефинише на интервалу $(-\infty, b)$.

Ако лимеси постоје и коначни су кажемо да интеграл конвергира, а у супротном да дивергира.

Нека је $a < c < b$. Интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ конвергира ако и само конвергира $\displaystyle\int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x$ и важи

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Пример 2.7. Израчунати $I_3 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x.$

Одговарајући неодређени интеграл је

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{2x-1+3}{\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-x)}{\sqrt{x^2-x}} + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1/2)^2-1/4}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2-x}}{1/2} + \frac{3}{2}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x}) + C,\end{aligned}$$

па је

$$I_3 = \left(\sqrt{x^2-x} + \frac{3}{2}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x})\right)\Bigg|_{-1/2}^{0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\ln(2-\sqrt{3}) \approx 1,10941.$$

Пример 2.8. Израчунати $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

Дати интеграл I је несвојствен - има неограничену горњу границу и подинтегрална функција није дефинисана за $x=1$. Зато ћемо га написати као збир два интеграла $I = I_1 + I_2$, при чему је $I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$ и $I_2 = \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$. Израчунајмо прво неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \begin{bmatrix}\sqrt{x-1}=t,\ x=t^2+1 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\ t + c = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1} + c.$$

Тада је $I_1 = \lim_{a\to 1} 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}|_a^2 = \frac{\pi}{2}$, и $I_2 = \lim_{b\to\infty} 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}|_2^b = \pi - \frac{\pi}{2}$ па је $I = \pi$.

Пример 2.9. Израчунати $I = \int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{(1+\sin\varphi)(1-\frac{1}{2}\sin\varphi)^2}$.

Уведимо смену $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}{=}t$. Тада је $\sin x{=}\frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x{=}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, а нове границе за интеграл су 0 и ∞, па је

$$I = \int_0^\infty \frac{8t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2+2t)(1+t^2-t)^2} = \int_0^\infty \frac{8t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^3}.$$

Очигледно, треба увести смену $1+t^3=u$, $t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$, $u=1$ за $t=0$ и $u=\infty$ за $t=\infty$, па је

$$I = \frac{8}{3}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\lim_{b\to\infty}\frac{8}{3u}\Bigg|_1^b = \frac{8}{3}.$$

Пример 2.10. Израчунати $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}I = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u=\ln x, & \mathrm{d}v = \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}, \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}, & v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}\end{bmatrix} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Bigg|_1^b + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\right) \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^b \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right)\Bigg|_1^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln b - \frac{1}{2}(\ln(1+b^2)-\ln 2)\right) \\ &= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b^2}{b^2+1} + \frac{\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

Пример 2.11. Израчунати $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}I = \int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} x-1/x=t, \quad \left(1-1/x^2\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \\ \left(x-1/x\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2+1/x^2 = t^2+2, \\ x=0\Rightarrow t=-\infty, \quad x=\infty\Rightarrow t=\infty\end{bmatrix} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{a\to-\infty}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\Bigg|_a^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{b\to\infty}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^b = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Пример 2.12. Израчунати $\displaystyle\int_0^\infty (\sqrt{2+e^{-x}}-\sqrt{2})\,\mathrm{d}x$.

Уведећи смену $2+e^{-x}=t^2$ $(t>0)$ полазни интеграл се своди на

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}}(t-\sqrt{2})\left(\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{t^2-2}\right)=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{t\,\mathrm{d}t}{t+\sqrt{2}}=2(t-\sqrt{2}\ln(t+\sqrt{2}))\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$
$$=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{2}\ln 8-2\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\approx 0.3345.$$

Пример 2.13. Израчунати $\displaystyle\int_0^\infty x^{10}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Полазећи од интеграла

$$I_n=\int_0^\infty x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=x^n, & \mathrm{d}v=e^{-x}\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=nx^{n-1}\,\mathrm{d}x, & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=\lim_{b\to\infty}\left(-x^ne^{-x}\Big|_0^b\right)+nI_{n-1}=nI_{n-1},$$

при чему је $I_0=1$, добијамо да је $I_n=n!$. Дакле, $I_{10}=10!$.

Интеграл I_n дефинише *Гама функцију*, која представља продужење факторијел функције.

2.3 Примена интеграла

Површина равног лика

Нека је γ непрекидна крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата функцијом $y=f(x)$ за $x\in[a,b]$, тада је површина између лука криве $f(x)$ и $x-$осе на интервалу $[a,b]$

$$P=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Последично, поврсина фигуре у равни одређена кривим $f_1(x)$ и $f_2(x)$ је

$$P=\int_a^b|f_2(x)-f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$. Тада је површина фигуре одређене кривом γ за $\varphi\in[\alpha,\beta]$

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2\,\mathrm{d}\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$ и нека је P површина између криве γ и $x-$осе. Разликује наредне случајеве.

(1) Ако је $x(t)$ растућа и $y(t)\geqslant 0$ или је $x(t)$ опадајућа и $y(t)\leqslant 0$, онда је

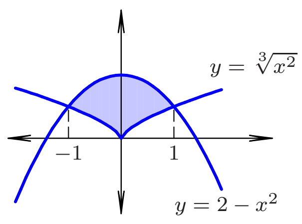
$$P=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) Ако је $x(t)$ опадајућа и $y(t)\geqslant 0$ или је $x(t)$ растућа и $y(t)\leqslant 0$, онда је

$$P=-\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 2.14. Израчунати површину омеђену кривим $y=2-x^2$ и $y^3=x^2$.
Нађимо пресечне тачке датих кривих:

$$\begin{cases}y=2-x^2\\ y^3=x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2-y^3\\ y^3=x^2\end{cases}\Rightarrow y=1,\ x=\pm1,$$



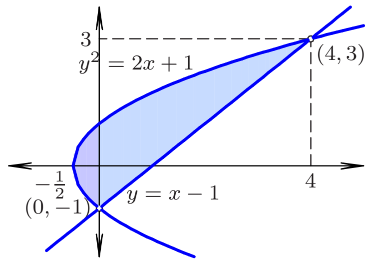
па је површина између кривих $y=2-x^2$ и $y=\sqrt[3]{x^2}$

$$P=\int_{-1}^{1}(2-x^2-\sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2-x^2-\sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{d}x=\frac{32}{15}.$$

Пример 2.15. Израчунати површину омеђену кривим $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

Крива $y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ је парабола са теменом $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ која сече $y-$осу у тачкама $(0, -1)$ и $(0, 1)$. Нађимо пресечне тачке датих кривих:

$$\begin{cases} y^2 = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = -1; \\ x_2 = 4,\ y_2 = 3. \end{cases}$$



Тражену површину P налазимо као збир површине P_1 између кривих $y = -\sqrt{2x+1}$ и $y = \sqrt{2x+1}$ на $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ и површине P_2 између кривих $y = x - 1$ и $y = \sqrt{2x+1}$ на $[0, 4]$. Дакле,

$$P = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (\sqrt{2x+1} - (-\sqrt{2x+1}))\,\mathrm{d}x + \int_0^4 (\sqrt{2x+1} - (x-1))\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{16}{3}.$$

Други начин би био да посматрамо дате криве као функције од y: $x = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)$, $x = y + 1$, па да површину рачунамо као интеграл дуж $y-$осе:

$$P = \int_{-1}^{3} \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right)\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{16}{3}.$$

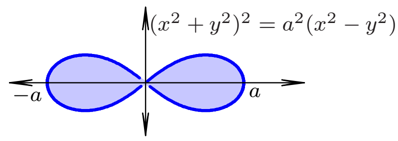
Пример 2.16. Наћи површину фигуре омеђене кривом $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и правама $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ и $y = 0$.

Тражена површина једнака је

$$\begin{aligned} P &= \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{1 - \cos^2 t} + \cos t\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \begin{bmatrix} \cos t = u, \\ -\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2.17. Наћи површину фигуре ограничене кривом $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Бернулијевом лемнискатом).

Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ добијамо једначину $(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$, одакле је $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. Видимо да мора бити $\cos 2\varphi \geqslant 0$, тј. $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Због периодичности функције $\cos 2\varphi$ тражена површина је

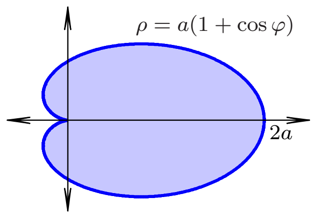


$$P = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

Пример 2.18. Наћи површину кардиоиде $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a > 0$.

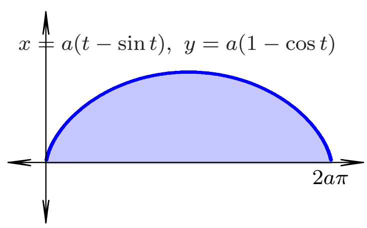
Тражена површина је

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = a^2\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2})\,\mathrm{d}\varphi \\ &= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi. \end{aligned}$$



Пример 2.19. Наћи површину P ограничену једним луком циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и $x-$осом ($a > 0$ и $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$).

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\cdot a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 3a^2\pi. \end{aligned}$$



Запремина обртног тела

Нека је γ ненегативна непрекидна крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата једначином $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тада је запремина тела насталог ротацијом криве γ око $x-$осе

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

а запремина тела насталог ротацијом криве око $y-$осе је

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)\,\mathrm{d}x.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Запремина тела насталог ротацијом криве γ око поларне осе је

$$V = \frac{2}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ и нека је $x(t)$ растућа на $[t_1, t_2]$. Запремина тела насталог ротацијом криве γ око $x-$осе је

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 2.20. Крива $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ ротира око x-осе. Одредити запремину добијеног тела.

Тражена запремина је

$$V = \pi \int_0^\pi x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x \cos 2x\,\mathrm{d}x.$$

$$= \begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \sin 2x/2 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2} \left[\frac{x \sin 2x}{2}\Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x \right] = \frac{\pi^3}{4} \approx 7,7516.$$

Пример 2.21. Наћи запремину тела насталог ротацијом криве $y = \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right)^{-3/4}$ око x-осе за $x \geqslant 0$.

Знамо да је запремина тела добијена ротацијом криве $y = y(x)$ око $x-$осе за $x \in [a, b]$ једнака $\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. У нашем случају запремина V ће бити несвојствени интеграл

$$\pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 3/x^2)^{3/2}} = \pi \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x^4 + 3)^{3/2}}.$$

Увођењем смене $x^4 + 4 = t$, $4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, при чему је $t = 3$ када је $x = 0$ и $t = b^4 + 3$ када је $x = b$, добијамо

$$V = \frac{\pi}{4} \lim_{b \to \infty} \int_3^{b^4+3} t^{-3/2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2} \lim_{b \to \infty} t^{-1/2}\Big|_3^{b^4+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069.$$

Пример 2.22. Наћи запремину тела које настаје ротацијом кардиоиде $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ око поларне осе.

Тело описује горњи лук кардиодие, па је $\varphi \in [0, \pi]$. Дакле, запремина је

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \rho^3 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3(1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \begin{bmatrix} 1 + \cos\varphi = t, & -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t, \\ \varphi = 0 \Rightarrow t = 2, & \varphi = \pi \Rightarrow t = 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2a^3\pi}{3} \int_0^2 t^3(-\mathrm{d}t) = \frac{2a^3\pi}{3} \int_0^2 t^3\,\mathrm{d}t = \frac{2a^3\pi}{3} \frac{t^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{8a^3\pi}{3}.$$

Дужина лука криве

Нека је γ глатка крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата једначином $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Тада је дужина лука криве γ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Дужина лука криве γ је

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Дужина лука криве γ је

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Пример 2.23. Наћи дужину лука криве $y = \ln\cos x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

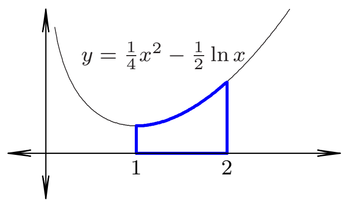
Дужина лука криве $y = y(x)$ за $x \in [a, b]$ се рачуна по формули $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. У нашем случају је $1 + (y'(x))^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$, па је

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1 - \sin^2 x}.$$

Увођењем смене $\sin x = t$, $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $t = 0$ за $x = 0$ и $t = 1/\sqrt{2}$ за $x = \pi/4$ добијамо да је

$$L = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0,8814.$$

Пример 2.24. Наћи обим фигуре одређене кривом $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ и правама $x = 1,\ x = 2,\ y = 0$.
Дужина лука L дате криве за $x \in [1, 2]$ је



$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Дужина дужи од тачке $(1, 0)$ до тачке $(1, y(1))$ је $y(1) = \frac{1}{4}$; дужина дужи од тачке $(2, 0)$ до тачке $(2, y(2))$ је $y(2) = 1 - \frac{1}{2}\ln 2$. Коначо, дужина сегмента на $x-$оси од тачке $(1, 0)$ до тачке $(2, 0)$ је 1, па је тражени обим

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2}\ln 2 + 1 = 3.$$

Пример 2.25. Наћи дужину лука криве $y = \operatorname{arch} x$ за $x \in [1, 2]$.

Нека је $y = t$. Тада је $x = \operatorname{ch} t$, $t \in [0, \operatorname{arch} 2]$, па је тражена дужина лука

$$L = \int_0^{\operatorname{arch} 2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{arch} 2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\operatorname{arch} 2} \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t = \operatorname{sh} t\Big|_0^{\operatorname{arch} 2}$$
$$= \operatorname{sh}\operatorname{arch} 2 = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} 2) + 1} = \sqrt{3}.$$

Пример 2.26. Наћи дужину лука криве $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, $a \neq b$.

Преласком на параметарски облик криве $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, добијамо да је њена дужуна лука

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9b^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 3\int_0^{2\pi} |\cos t\sin t|\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 12\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\sqrt{a^2\frac{1+\cos 2t}{2} + b^2\frac{1-\cos 2t}{2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{6}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \cos 2t = u, \quad -2\sin 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u, \\ t = 0 \Rightarrow u = 1, \quad t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \sqrt{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)u}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{\sqrt{2}(a^2 - b^2)}\frac{(a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)u)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{a + b}.$$

Површина обртног тела

Нека је γ ненегативна глатка крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата једначином $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тада је површина тела насталог ротацијом криве γ око $x-$осе

$$P = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Површина тела насталог ротацијом криве γ око поларне осе је

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Површина тела насталог ротацијом криве γ око $x-$осе је

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Пример 2.27. Наћи површину тела насталог ротацијом криве $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ око $x-$осе за $x \in [-a, a]$.

Како је $\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}$, то је $y' = \frac{e^{x/a}-e^{-x/a}}{2}$, па је тражена површина

$$\begin{aligned}
&2\pi\int_{-a}^{a} a\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^{x/a}-e^{-x/a}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2a\pi\int_{-a}^{a}\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\sqrt{\left(\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= 2a\pi\int_{-a}^{a}\left(\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{2}\int_{-a}^{a}(e^{2x/a}+2+e^{-2x/a})\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{a\pi}{2}\left(\frac{e^{2x/a}}{2/a}+2x+\frac{e^{-2x/a}}{-2/a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{a\pi}{2}\left(ae^2-ae^{-2}+4a\right) = a^2\pi(\operatorname{sh}2+2).
\end{aligned}$$

Пример 2.28. Наћи површину P обртног тела које настаје ротацијом лемнискате $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ око поларне осе.

На основу симетрије је

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{a^2\cos 2\varphi+\left(-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi=4a^2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=4a^2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$