Машински факултет, Београд 29. децембар 2022.

Други колоквијум из Алгебре и линеарне алгебре
ИТМ

Група 1

1. Нека су $A,\ B,\ C$ исказне формуле такве да су формуле $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ и $(A \wedge C) \Rightarrow \neg B$ таутологије. Да ли је тада и формула $(B \wedge A) \Rightarrow \neg C$ таутологија?

2. (а) Испитати да ли је исказна формула $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((r \vee p) \wedge q)$ таутологија и конвертовати је у дисјунктивну нормалну форму.

   (б) Уколико се исказима p, q и r доделе изрази x_p, x_q и x_r који су једнаки 1 ако је одговарајући исказ тачан, односно 0 ако није, креирати израз $f(x_p, x_q, x_r)$ који је једнак 1 кадгод је дата формула тачна, односно 0 кад је нетачна.

3. Испитати природу структуре $(\mathbb{Z}^2, *)$ где је $\mathbb{Z}$ скуп цијелих бројева, а операција $*$ дефинисана са $(a,\ b) * (c,\ d) = (a + c,\ b(-1)^c + d)$.

4. (а) Коју структуру представља $(\mathbb{Z}_{4k+3},\ +_{4k+3},\ \cdot_{4k+3})$ у зависности од k, $0 \leq k \leq 10$, где су $+_{4k+3}$ и $\cdot_{4k+3}$ операције сабирања и множења по модулу $4k+3$. Одредити адитивне неутрале елемената скупа $\mathbb{Z}_{4k+3}$ за $k = 1$.

   (б) * Доказати Малу Фермаову теорему: Ако је a цео број и p прост број при чему a није дељив са p, доказати да a^{p-1} при дељењу са p даје остатак 1.

5. Класификовати, скицирати и свести на канонски облик криву другог реда дату једначином $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x + 8y = 0$.

* **Задатак** (Први колоквијум):
Решити систем линеарних једначина са параметром $\alpha \in \mathbb{R}$. За које вредности параметра α овај систем има решења?

$$\begin{gathered} x + y + 2z + u = 0 \\ \alpha x - y + 5u = 0 \\ -y - \alpha z + 2u = 0 \end{gathered}$$