5.1 Zadaci

Ispitati svojstva strukture (75 - 94).

Zadatak 75 $(Z, *)$, *gde je* Z *skup celih brojeva i* $x * y := x + y + 2$.

Zadatak 76 $(R, *)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x * y := x + y + xy$.

Zadatak 77 $(Q, \circ)$, *gde je* Q *skup racionalnih brojeva i* $x \circ y := x + 2y$.

Zadatak 78 $(R, \circ)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x \circ y := 2x + 2y$.

Zadatak 79 $(R, \circ)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x \circ y := 1-(x+y)+2xy$.

Zadatak 80 $(Q^+, *)$, *gde je* Q^+ *skup pozitivnih racionalnih brojeva i* $x * y := \dfrac{xy}{x+y}$.

Zadatak 81 $(R^+, *)$, *gde je* R^+ *skup pozitivnih realnih brojeva i* $x * y := x^2y^2$.

Zadatak 82 $(G, \cdot)$, *gde je* $G = \{x + y\sqrt{5} \mid x^2 - 5y^2 = 1;\ x, y \in Q\}$, *a „·" množenje realnih brojeva.*

Zadatak 83 $(G, *)$, *gde je* $G = \{x \mid -1 < x < 1,\ x \in R\}$ *i* $x*y := \dfrac{x+y}{1+xy}$.

Zadatak 84 $(R \setminus \{0\}, *)$, *gde je* R *skup realnih brojeva i* $x * y := \dfrac{xy}{2}$.

Zadatak 85 $(S, *)$, *gde je* $S = \{(a, b) \mid a, b \in Q,\ a \neq 0\}$ *i*

$$(a, b) * (c, d) := (ac, bc + c + d).$$

Zadatak 86 $(S, \cdot)$, *gde je* $S = \left\{ \dfrac{1+2m}{1+2n} \;\middle|\; m, n \in Z \right\}$ *i „·" množenje racionalnih brojeva.*

Zadatak 87 $(S, \circ)$, *gde je* $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ *i „$\circ$" je množenje preslikavanja. Funkcije* f_1, f_2, f_3, f_4 *preslikavaju skup* $R \setminus \{0\}$ *u skup* $R \setminus \{0\}$ *i pri tome je:*

$$f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = -x, \;\; f_3(x) = \frac{1}{x} \quad i \quad f_4(x) = -\frac{1}{x} \; .$$

Zadatak 88 $(\{a, b\}, *)$ *i operacija* $*$ *je data tablicom*

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

Zadatak 89 $(\{\top, \bot\}, \; \wedge)$

Zadatak 90 $(\{\top, \bot\}, \; \vee)$

Zadatak 91 $(Z \times Q, *)$, *gde su* Z *i* Q *skupovi celih, odnosno racionalnih brojeva i*

$$(x, y) * (u, v) := (x + u, 2^u y + v).$$

Zadatak 92 $(S, \cdot)$, *gde je* $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in Q; \; a + b\sqrt{2} > 0 \right\}$ *i „$\cdot$" množenje matrica.*

Zadatak 93 $(Z, *, \circ)$, *gde je* Z *skup celih brojeva ,*

$$x * y := x + y + 1 \quad i \quad x \circ y := xy + x + y.$$

Zadatak 94 $(S, +, \cdot)$, *gde je* $S = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in Z\}$ *, i „+" i „$\cdot$" sabiranje, odnosno množenje realnih brojeva.*

5.2 Rešenja

U zadacima (75 – 92) ispituju se sledeća svojstva algebarskih struktura:

1° grupoidnost,

2° asocijativnost,

3° postojanje neutralnog elementa,

4° postojanje inverznog elementa,

5° komutativnost.

Rešenje 75

1° $x \in Z \ \wedge \ y \in Z \implies x + y + 2 \in Z$

2° $(x * y) * z = (x + y + 2) * z = (x + y + 2) + z + 2 = x + y + z + 4$
$x * (y * z) = x * (y + z + 2) = x + (y + z + 2) + 2 = x + y + z + 4$

3° $x * e = e * x = x$
$x + e + 2 = e + x + 2 = x, \ e = -2$

4° $x * x' = x' * x = -2$
$x + x' + 2 = x' + x + 2 = -2, \ x' = -x - 4$

5° $x * y = y * x$
$x + y + 2 = y + x + 2$

$(Z, *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 76

1° $x \in R \ \wedge \ y \in R \implies x + y + xy \in R$

2°
$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y + xy) * z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\ x * (y * z) &= x * (y + z + yz) = x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \end{aligned}$$

3° $x * e = e * x = x,\ x + e + xe = e + x + ex = x,\ e(1 + x) = 0,\ e = 0$

4° $x * x' = x' * x = 0,\ x + x' + xx' = x' + x + x'x = 0,\ (1 + x)x' = -x,$
$x' = -\dfrac{x}{1+x},\ x \neq -1$

5° $x * y = y * x,\ x + y + xy = y + x + yx$

$(R, *)$ nije grupa jer za element -1 ne postoji inverzni element.
$(R, *)$ je komutativna polugrupa sa neutralnim elementom.

Rešenje 77

1° $x \in Q \ \wedge\ y \in Q \implies x + 2y \in Q$

2° $(x \circ y) \circ z = (x + 2y) \circ z = (x + 2y) + 2z = x + 2y + 2z$
$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + 2z) = x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z$

3° $x \circ e = x,\ x + 2e = x,\ e = 0$
$0 \circ x = 0 + 2x = 2x$

4° Pošto ne postoji neutralni element, nema smisla ispitivati egzistenciju inverznih elemenata.

5° $x \circ y = x + 2y,\ y \circ x = y + 2x$

$(Q, \circ)$ je grupoid.

Rešenje 78

1° $x \in R \ \wedge\ y \in R \implies 2x + 2y \in R$

2° $(x \circ y) \circ z = (2x + 2y) \circ z = 2(2x + 2y) + 2z = 4x + 4y + 2z$
$x \circ (y \circ z) = x \circ (2y + 2z) = 2x + 2(2y + 2z) = 2x + 4y + 4z$

3° $x \circ e = e \circ x \neq x$
$2x + 2e = 2e + 2x \neq x$

4° Ne postoji inverzni element.

5° $x \circ y = 2x + 2y$
$y \circ x = 2y + 2x = 2x + 2y$

$(R, \circ)$ je komutativan grupoid.

Rešenje 79

$1^\circ \quad x \in R \ \wedge \ y \in R \implies 1-(x+y)+2xy \in R$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad (x \circ y) \circ z &= (1-x-y+2xy) \circ z \\ &= 1-(1-x-y+2xy)-z+2(1-x-y+2xy)z \\ &= x+y+z-2xy-2xz-2yz+4xyz \\ x \circ (y \circ z) &= x \circ (1-y-z+2yz) \\ &= 1-x-(1-y-z+2yz)+2x(1-y-z+2yz) \\ &= x+y+z-2xy-2xz-2yz+4xyz \end{aligned}$$

$3^\circ \quad x \circ e = e \circ x = x$

$1-x-e+2xe = 1-e-x+2ex = x$

$1-2x-e+2xe = 0, \ (1-2x)(1-e) = 0, \ e = 1$

$4^\circ \quad x \circ x' = x' \circ x = 1, \ 1-x-x'+2xx' = 1-x'-x+2x'x = 1, \ (2x-1)x' = x,$

$x' = \dfrac{x}{2x-1}, \ x \neq \dfrac{1}{2}$

$5^\circ \quad x \circ y = 1-x-y+2xy, \ y \circ x = 1-y-x+2yx = 1-x-y+2xy$

$(R, \circ)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom.

Rešenje 80

$1^\circ \quad x \in Q^+ \ \wedge \ y \in Q^+ \implies \dfrac{xy}{x+y} \in Q^+$

$$2^\circ \quad (x * y) * z = \frac{xy}{x+y} * z = \frac{\dfrac{xy}{x+y} z}{\dfrac{xy}{x+y} + z} = \frac{xyz}{xy+xz+yz}$$

$$x * (y * z) = x * \frac{yz}{y+z} = \frac{x \dfrac{yz}{y+z}}{x + \dfrac{yz}{y+z}} = \frac{xyz}{xy+xz+yz}$$

$3^\circ \quad x * e = e * x = x, \ \dfrac{xe}{x+e} = \dfrac{ex}{e+x} = x, \ xe = x^2 + xe, \ x^2 = 0$

$(Q^+, *)$ nema neutralni element.

4° $(Q^+, *)$ nema inverzni element.

5° $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$

$y * x = \dfrac{yx}{y+x} = \dfrac{xy}{x+y}$

$(Q^+, *)$ je komutativna polugrupa.

Rešenje 81

1° $x \in R^+ \ \wedge \ y \in R^+ \implies x^2y^2 \in R^+$

2° $(x * y) * z = (x^2y^2) * z = (x^2y^2)^2z^2 = x^4y^4z^2$

$x * (y * z) = x * (y^2z^2) = x^2(y^2z^2)^2 = x^2y^4z^4$

3° $x * e = e * x = x, \ x^2e^2 = e^2x^2 = x$

$(R^+, *)$ nema neutralni element.

4° $(R^+, *)$ nema inverzni element.

5° $x * y = x^2y^2$

$y * x = y^2x^2 = x^2y^2$

$(R^+, *)$ je komutativan grupoid.

Rešenje 82

1° Ako je $a, b \in G$, onda postoje $x_1, y_1, x_2, y_2 \in Q$ takvi da je

$a = x_1 + y_1\sqrt{5}, \ b = x_2 + y_2\sqrt{5}, \ x_1^2 - 5y_1^2 = 1$ i $x_2^2 - 5y_2^2 = 1$. Tada je

$$a \cdot b = (x_1 + y_1\sqrt{5}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{5}) = (x_1x_2 + 5y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{5}.$$

Neposredno je jasno da je $x_1x_2+5y_1y_2, \ x_1y_2+x_2y_1 \in Q$. Dalje imamo:

$$\begin{aligned}
&(x_1x_2 + 5y_1y_2)^2 - 5(x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\
&= x_1^2x_2^2 + 10x_1x_2y_1y_2 + 25y_1^2y_2^2 - 5x_1^2y_2^2 - 10x_1x_2y_1y_2 - 5x_2^2y_1^2 \\
&= x_1^2x_2^2 - 5x_1^2y_2^2 - 5x_2^2y_1^2 + 25y_1^2y_2^2 \\
&= x_1^2(x_2^2 - 5y_2^2) - 5y_1^2(x_2^2 - 5y_2^2) \\
&= (x_1^2 - 5y_1^2) \cdot (x_2^2 - 5y_2^2) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2° Asocijativnost važi jer je u pitanju množenje realnih brojeva.

3° Neutralni element je $e = 1 + 0 \cdot \sqrt{5}$.

4° Neka je $a = x + y\sqrt{5}$. Dokažimo da je $a' = \dfrac{1}{x + y\sqrt{5}}$ inverzni element elementa a.

$$a' = \frac{1}{x + y\sqrt{5}} \cdot \frac{x - y\sqrt{5}}{x - y\sqrt{5}} = \frac{x - y\sqrt{5}}{x^2 - 5y^2} = \frac{x - y\sqrt{5}}{1} = x - y\sqrt{5}$$

$$x^2 - 5(-y)^2 = x^2 - 5y^2 = 1.$$

5° Komutativnost važi jer je u pitanju množenje realnih brojeva.

$(G, \cdot)$ je komutativna grupa

Rešenje 83

1° $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$

$$(1 - x^2)(1 - y^2) > 0$$

$$1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 > 0$$

$$1 + 2xy + x^2y^2 > x^2 + 2xy + y^2$$

$$(1 + xy)^2 > (x + y)^2$$

$$\frac{(x + y)^2}{(1 + xy)^2} < 1, \ 1 + xy > 0$$

$$\left| \frac{x + y}{1 + xy} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{x + y}{1 + xy} < 1.$$

2° $$(x * y) * z = \frac{x + y}{1 + xy} * z = \frac{\dfrac{x + y}{1 + xy} + z}{1 + \dfrac{x + y}{1 + xy} \cdot z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}$$

$$x * (y * z) = x * \frac{y + z}{1 + yz} = \frac{x + \dfrac{y + z}{1 + yz}}{1 + x\dfrac{y + z}{1 + yz}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz}.$$

3° $x * e = e * x = x,$
$$\frac{x+e}{1+xe} = \frac{e+x}{1+ex} = x,$$
$$e(1-x^2) = 0,\ e = 0$$

4° $x * x' = x' * x = 0$
$$\frac{x+x'}{1+xx'} = \frac{x'+x}{1+x'x} = 0,\ x' = -x$$

5° $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{y+x}{1+yx} = y * x.$

$(G, *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 84

1° $x, y \in R \setminus \{0\} \Longrightarrow \dfrac{xy}{2} \in R \setminus \{0\}$

2° $(x * y) * z = \left(\dfrac{xy}{2}\right) * z = \dfrac{\frac{xy}{2}z}{2} = \dfrac{xyz}{4}$

$x * (y * z) = x * \left(\dfrac{yz}{2}\right) = \dfrac{x\frac{yz}{2}}{2} = \dfrac{xyz}{4}$

3° $x * e = e * x = x,$
$$\frac{xe}{2} = \frac{ex}{2} = x,\ e = 2$$

4° $x * x' = x' * x = 2$
$$\frac{xx'}{2} = \frac{x'x}{2} = 2,\ x' = \frac{4}{x}$$

5° $x * y = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{yx}{2} = y * x.$

$(R \setminus \{0\}, *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 85

1° $(a, b) \in S \wedge (c, d) \in S \Longrightarrow (ac,\ bc + c + d) \in S$

2° $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac,\ bc + c + d) * (e, f)$
$= (ace,\ bce + ce + de + e + f)$
$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (ce,\ de + e + f)$
$= (ace,\ bce + ce + de + e + f)$

3° $(a,b)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(a,b)=(a,b)$

$(ae_1,\ be_1+e_1+e_2)=(e_1a,\ e_2a+a+b)=(a,b)$

$ae_1=e_1a=a,\ e_1=1$

$be_1+e_1+e_2=e_2a+a+b=b$

$b+1+e_2=e_2a+a+b=b,\ e_2=-1$

$(1,-1)$ je neutralni element za operaciju $*$.

4° $(a,b)*(a',b')=(a',b')*(a,b)=(1,-1)$

$(aa',\ ba'+a'+b')=(a'a,\ b'a+a+b)=(1,-1)$

$aa'=a'a=1,\ a'=\dfrac{1}{a}$

$ba'+a'+b'=b'a+a+b=-1$

$b\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+b'=b'a+a+b=-1,\ b'=-\dfrac{a+b+1}{a}$

$\left(\dfrac{1}{a}\ ,\ -\dfrac{a+b+1}{a}\right)$ je inverzni element za (a,b).

5° $(a,b)*(c,d)=(ac,\ bc+c+d)$

$(c,d)*(a,b)=(ca,\ da+a+b)$

$(S,*)$ je nekomutativna grupa.

Rešenje 86

1° $x=\dfrac{1+2m_1}{1+2n_1}\ ,\ y=\dfrac{1+2m_2}{1+2n_2}$

$x\cdot y=\dfrac{1+2m_1}{1+2n_1}\cdot\dfrac{1+2m_2}{1+2n_2}=\dfrac{1+2(m_1+m_2+2m_1m_2)}{1+2(n_1+n_2+2n_1n_2)}\in S$

2° Asocijativnost važi jer je u pitanju množenje racionalnih brojeva.

3° $e=1=\dfrac{1+2\cdot 0}{1+2\cdot 0}$

4° $x=\dfrac{1+2\cdot m}{1+2\cdot n}\ ,\ x'=\dfrac{1+2\cdot n}{1+2\cdot m}$

5° Komutativnost važi jer je u pitanju množenje racionalnih brojeva.

$(S,\cdot)$ je komutativna grupa.

Rešenje 87

1°

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

2° Asocijativnost važi jer je u pitanju množenje preslikavanja.

3° $e = f_1$

4° $f_1' = f_1,\ f_2' = f_2,\ f_3' = f_3,\ f_4' = f_4$

5° Iz tablice neposredno sledi komutativnost operacije $\circ$.

$(S\circ)$ je komutativna grupa.

Rešenje 88

1° $x, y \in \{a, b\} \Longrightarrow x * y \in \{a, b\}$.

2°

x	y	z	$x * y$	$y * z$	$(x * y) * z$	$x * (y * z)$
a	a	a	a	a	a	a
a	a	b	a	b	b	b
a	b	a	b	b	b	b
a	b	b	b	a	a	a
b	a	a	b	a	b	b
b	a	b	b	b	a	a
b	b	a	a	b	a	a
b	b	b	a	a	b	b

3° $e = a$

4° $a' = a,\ b' = b$

5°

x	y	$x * y$	$y * x$
a	a	a	a
a	b	b	b
b	a	b	b
b	b	a	a

$(\{a, b\},\ *)$ je komutativna grupa.

Rešenje 89

1° $x, y \in \{\top, \bot\} \Longrightarrow x \wedge y \in \{\top, \bot\}$.

2°

x	y	z	$x \wedge y$	$y \wedge z$	$(x \wedge y) \wedge z$	$x \wedge (y \wedge z)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

3° $e = \top$

$$x \wedge \top = \top \wedge x = x$$
$$x = x = x$$

4° $x' \wedge \bot = \bot \wedge x' = \bot \neq \top$

Element $x = \bot$ nema inverzni element.

5°

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$(\{\top, \bot\},\ \wedge)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom.

Rešenje 90 $(\{\top, \bot\},\ \vee)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom.

Rešenje 91

1° $(x, y), (u, v) \in Z \times Q \Longrightarrow (x + u,\ 2^u y + v) \in Z \times Q$

2° $$\begin{aligned}((a, b) * (c, d)) * (e, f) &= (a + c,\ 2^c b + d) * (e, f) \\ &= (a + c + e,\ 2^e(2^c b + d) + f)\end{aligned}$$

$$= (a+c+e,\ 2^{e+c}b + 2^e d + f)$$

$$(a,b) * ((c,d) * (e,f)) = (a,b) * (c+e,\ 2^e d + f)$$

$$= (a+c+e, 2^{c+e}b + 2^e d + f)$$

3° $(e_1, e_2) = (0,0),\ (x,y) * (0,0) = (0,0) * (x,y) = (x,y)$

4° $(x,y)' = (-x, -2^{-x}y)$

5° $(x,y) * (u,v) = (x+u, 2^u y + v)$

$(u,v) * (x,y) = (u+x, 2^x v + y)$

$(Z \times Q, *)$ je grupa.

Rešenje 92

1° $x = \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix},\ a_1 + b_1\sqrt{2} > 0,\ a_2 + b_2\sqrt{2} > 0$

$$x \cdot y = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2a_1b_2 + 2a_2b_1 \\ a_2b_1 + a_1b_2 & 2b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} = a_1(a_2 + b_2\sqrt{2}) + b_1\sqrt{2}(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= (a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) > 0$$

2° Množenje matrica je asocijativno.

3° $e = \begin{bmatrix} 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S,\ 1 + 0\sqrt{2} = 1 > 0$

4° $x = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix},\ x' = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2-2b^2} & \dfrac{-2b}{a^2-2b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2-2b^2} & \dfrac{a}{a^2-2b^2} \end{bmatrix}$

$$\frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a-b\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} > 0$$

5° $\begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2a_1b_2 + 2a_2b_1 \\ a_2b_1 + a_1b_2 & 2b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2a_2b_1 + 2a_1b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & 2b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$$

$(S, \cdot)$ je komutativna grupa.

U zadacima $(93-94)$ ispituju se svojstva algebarskih struktura sa dve operacije i to:

1) U tačkama $(1^\circ - 5^\circ)$ svojstva prve operacije redom: grupoidnost, asocijativnost, postojanje neutralnog elementa, postojanje inverznog elementa i komutativnost.

2) U tački 6° se ispituje distributivnost druge operacije prema prvoj.

3) U tačkama $(7^\circ - 11^\circ)$ se ispituju svojstva druge operacije istim redom kao svojstva prve operacije u tačkama $(1^\circ - 5^\circ)$.

Rešenje 93

1° $x \in Z \ \wedge \ y \in Z \Longrightarrow x + y + 1 \in Z$

2° $(x * y) * z = (x + y + 1) * z = x + y + z + 2$

$x * (y * z) = x * (y + z + 1) = x + y + z + 2$

3° $x * e = e * x = x$

$x + e + 1 = e + x + 1 = x, \ e = -1$

4° $x * x' = x' * x = -1$

$x + x' + 1 = x' + x + 1 = -1, \ x' = -x - 2$

5° $x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$

6° $x \in Z \wedge y \in Z \Longrightarrow xy + x + y \in Z$

7° $(x \circ y) \circ z = (xy + x + y) \circ z = (xy + x + y)z + (xy + x + y) + z$

$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (yz + y + z) = x(yz + y + z) + x + (yz + y + z)$

$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$

8° $x \circ e' = e' \circ x = x$

$xe' + x + e' = e'x + e' + x = x$

$(x + 1)e' = 0, \ e' = 0$

9° $x \neq -1$

$x \circ x' = x' \circ x = 0$

$xx' + x + x' = x'x + x' + x = 0$

$(x+1)x' = -x,\ x' = -\dfrac{x}{x+1}$

10° $x \circ y = xy + x + y = yx + y + x = y \circ x$

11° $x \circ (y * z) = x \circ (y + z + 1) = x(y + z + 1) + x + (y + z + 1)$

$= 2x + y + z + 1 + xy + xz$

$(x \circ y) * (x \circ z) = (xy + x + y) * (xz + x + z)$

$= xy + x + y + xz + x + z + 1$

$= 2x + y + z + 1 + xy + xz$

$(Z, *, \circ)$ je polje.

Rešenje 94

1° $a = x_1 + y_1\sqrt{2},\ b = x_2 + y_2\sqrt{2}$

$a + b = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{2} \in S$

2° Sabiranje je asocijativno.

3° $e = 0 = 0 + 0\sqrt{2}$

4° $a = x + y\sqrt{2},\ a' = -x - y\sqrt{2}$

5° Sabiranje je komutativno.

6° $a = x_1 + y_1\sqrt{2},\ b = x_2 + y_2\sqrt{2}$

$a \cdot b = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2} \in S$

7° Množenje je asocijativno.

8° $e' = 1 = 1 + 0\sqrt{2}$

9° $a = 0 + 1\sqrt{2} \in S,\ a' = \dfrac{1}{0 + 1\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \notin S$

10° Množenje je komutativno.

11° Množenje je distributivno prema sabiranju.