Vektorski prostori

Vektorski prostor

Neka je X neprazan skup i $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje. Skup X je *vektorski* ili *linearni prostor* nad poljem skalara $\mathbb{K}$ ako ima sledeću strukturu:

(1) Definisana je operacija $+$ u skupu X (sabiranje vektora), takva da je $(X, +)$ Abelova grupa;

(2) Definisana je operacija $\cdot$ (množenje vektora skalarom) koja svakom vektoru $u \in X$ i svakom skalaru $\lambda \in \mathbb{K}$ pridružuje vektor $\lambda u \in X$, pri čemu važi sledeće:

1. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$,
2. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,
4. $1u = u$.

Ako su $u_1, u_2, \ldots, u_k \in X$ vektori i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ skalari, vektor

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$$

se zove *linearna kombinacija* vektora $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Skup svih linearnih kombinacija vektora iz skupa $A \subset X$ zove se *lineal* skupa A:

$$L(A) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \mid u_1, u_2, \ldots, u_k \in A,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Vektori $u_1, u_2, \ldots, u_n \in X$ su *linearno nezavisni* ako važi

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Vektori $u_1, u_2, \ldots, u_n \in X$ su *linearno zavisni* ako postoji $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $\lambda_k \neq 0$, tako da je

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \theta.$$

Ako u vektorskom prostoru X postoji n linearno nezavisnih vektora, a svaki skup od $n+1$ vektora je linearno zavisan, tada je prostor X n–dimenzionalan, tj.

$$\dim X = n.$$

Skup $B \subset X$ je *algebarska baza* prostora X ako je B skup linearno nezavisnih vektora i $L(B) = X$.

Skup $Y \subset X$ je *vektorski potprostor* vektorskog prostora X ako je on sam za sebe vektorski prostor nad istim poljem skalara i sa istim operacijama kao i prostor X.

Skup $Y \subset X$ je potprostor vektorskog prostora X ako i samo ako važi

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & (\forall u_1, u_2 \in Y) \quad u_1 + u_2 \in Y, \\ 2^\circ & (\forall u \in X)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) \quad \lambda u \in Y, \end{array}$$

ili, drugačije zapisano,

$$(\forall u, v \in Y)(\forall \mu, \nu \in \mathbb{K}) \quad \mu u + \nu v \in Y.$$

Normirani prostor

Vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$) je normiran ako postoji nenegativna funkcija $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ takva da je

1. $\|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \theta$,
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

za svako $\lambda \in \mathbb{K}$ i $u, v \in X$. Za funkciju $u \mapsto \|u\|$ kažemo da je *norma* ili *dužina* vektora u.

Zadaci:

1. Ispitati linearnu zavisnost vektora $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ ako je:

a) $u_1 = (1, 0, 3), \quad u_2 = (-1, 1, 1), \quad u_3 = (2, -1, 3);$

b) $u_1 = (2, 1, -1), \quad u_2 = (0, -2, 3), \quad u_3 = (-2, -4, 5).$

Rešenje: a) Formirajmo linearnu kombinaciju vektora u_1, u_2, u_3, izjednačimo je sa nula–vektorom i odredimo njene koeficijente:

$$\begin{aligned}\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 &= \lambda_1(1, 0, 3) + \lambda_2(-1, 1, 1) + \lambda_3(2, -1, 3)\\ &= (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3,\ \lambda_2 - \lambda_3,\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)\\ &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Vektori su jednaki ako imaju jednake odgovarajuće koordinate, pa se koeficijenti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dobijaju rešavanjem sistema linearnih jednačina

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0,\\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0,\\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0.\end{cases}$$

Množenjem prve jednačine sa -3 i dodavanjem trećoj, a zatim množenjem druge jednačine sa -4 i dodavanjem trećoj sistem dobija trougaoni oblik

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \quad\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \quad\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \quad\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Sistem jednačina je zadovoljen samo ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Kako je

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

vektori u_1, u_2, u_3 su linearno nezavisni.

b) Kao u prethodnom delu zadatka, odredimo koeficijente u proizvoljnoj linearnoj kombinaciji vektora u_1, u_2, u_3 koja je jednaka nula–vektoru:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 &= \lambda_1(2, 1, -1) + \lambda_2(0, -2, 3) + \lambda_3(-2, -4, 5) \\ &= (2\lambda_1 - 2\lambda_3,\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3,\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Posle sledećih koraka:
-drugu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo prvoj,
-drugu jednačinu dodamo trećoj,
-drugu jednačinu prebacimo na prvo mesto,
sistem dobija oblik

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \\ \quad 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \\ \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

tj. svodi se na dve jednačine

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \\ \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Iz druge jednačine dobija se $\lambda_2 = -\lambda_3$, a zamenom u prvoj i $\lambda_1 = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = -2\lambda_3 + 4\lambda_3 = 2\lambda_3$. Prema tome, sistem jednačina je zadovoljen za svaki izbor koeficijenata

$$\lambda_1 = 2\lambda_3, \quad \lambda_2 = -\lambda_3, \qquad \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Na primer, za $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ dobija se

$$2u_1 - u_2 + u_3 = \mathbf{0} \qquad \text{ili} \qquad u_3 = -2u_1 + u_2,$$

što znači da su vektori u_1, u_2, u_3 linearno zavisni.

2. Dokazati da vektori $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ čine bazu u prostoru $V_O(E)$ i odrediti koordinate vektora $\overrightarrow{d} = 6\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 14\overrightarrow{k}$ u toj bazi.

Rešenje: Vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ čine bazu u prostoru $V_O(E)$ ako su linearno nezavisni i ako svaki vektor $\overrightarrow{x} \in V_O(E)$ može da se predstavi kao njihova linearna kombinacija.

Da bismo dokazali linearnu nezavisnost $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$, posmatrajmo njihovu linearnu kombinaciju

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} &= \alpha(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + \beta(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + \gamma(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) \\
&= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{i} + (\alpha + \beta + 2\gamma)\overrightarrow{j} + (\alpha + 2\beta + 3\gamma)\overrightarrow{k}.
\end{aligned}$$

Dobijeni vektor je jednak nula–vektoru samo ako su mu koordinate jednake nuli, tj. ako važi

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Oduzimanjem prve jednačine od treće i druge jednačine redom, sistem linearnih jednačina dobija trougaoni oblik

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \beta + 2\gamma = 0, \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

koji je zadovoljen samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Prema tome, vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ su linearno nezavisni.

Pokažimo da proizvoljan $\overrightarrow{x} \in V_O(E)$ može da se predstavi kao linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$. Kako je $\dim V_O(E) = 3$, svaki skup od 4 vektora, pa i $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}\}$, je linearno zavisan, što znači da $\overrightarrow{x}$ može da se predstavi kao linearna kombinacija preostalih.

Na osnovu dokazanih činjenica, skup $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ čini bazu u prostoru $V_O(E)$. Koordinate vektora $\overrightarrow{d}$ u toj bazi su koeficijenti u linearnoj kombinaciji

$$\overrightarrow{d} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}$$

i određujemo ih na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{d} &= \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}, \\
6\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 14\overrightarrow{k} &= \alpha(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + \beta(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + \gamma(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{i} + (\alpha+\beta+2\gamma)\overrightarrow{j} + (\alpha+2\beta+3\gamma)\overrightarrow{k},
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 6, \\ \alpha+\beta+2\gamma &= 9, \\ \alpha+2\beta+3\gamma &= 14, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 6, \\ \beta+2\gamma &= 8, \\ \gamma &= 3, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma &= 3, \\ \beta &= 2, \\ \alpha &= 1. \end{aligned}\right.$$

Prema tome,

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}.$$

3. Dokazati da je $\{t^2, t^2+t, t+1\}$ baza u prostoru

$$\mathcal{P}_2 = \{p \mid p(t) = at^2 + bt + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

a zatim odrediti koordinate vektora $q(t) = 4t^2 - 1$ u toj bazi.

Rešenje: Kako je $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, dovoljno je dokazati da su vektori p_1, p_2, p_3, gde je $p_1(t) = t^2$, $p_2(t) = t^2 + t$, $p_3(t) = t + 1$, linearno nezavisni. Nula–vektor u prostoru $\mathcal{P}_2$ je nula–polinom $\mathcal{O}(t) = 0t^2 + 0t + 0$. Sada je

$$\begin{aligned}
\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = \mathcal{O} \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall t \in \mathbb{R})\ \lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) + \lambda_3 p_3(t) = \mathcal{O}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall t \in \mathbb{R})\ \lambda_1 t^2 + \lambda_2 \left(t^2 + t\right) + \lambda_3 (t+1) = \mathcal{O}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall t \in \mathbb{R})\ (\lambda_1 + \lambda_2)t^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)t + \lambda_3 = \mathcal{O}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ &\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ &\lambda_3 = 0 \end{aligned}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, vektori p_1, p_2, p_3 su linearno nezavisni, pa čine bazu u prostoru $\mathcal{P}_2$. Koordinate vektora q u toj bazi određujemo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
q=\alpha p_1+\beta p_2+\gamma p_3 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall t\in\mathbb{R})\ \ q(t)=\alpha p_1(t)+\beta p_2(t)+\gamma p_3(t)\\
&\Leftrightarrow \quad (\forall t\in\mathbb{R})\ \ 4t^2-1=\alpha t^2+\beta\left(t^2+t\right)+\gamma(t+1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =(\alpha+\beta)t^2+(\beta+\gamma)t+\gamma\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\alpha+\beta=4,\\ \beta+\gamma=0,\\ \gamma=1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \alpha=5,\ \beta=-1,\ \gamma=1.
\end{aligned}
$$

4. Ispitati da li skup vektora $\{(1,2,1),(0,1,2),(1,3,3)\}$ obrazuje bazu vektorskog prostora $\boldsymbol{R}^3$.

Rešenje: S obzirom da je $\dim\mathbb{R}^3=3$ i skup $\{(1,2,1),(0,1,2),(1,3,3)\}$ sadrži tri vektora, da bi ovaj skup vektora predstavljao bazu prostora $\boldsymbol{R}^3$, dovoljno je da bude linearno nezavisan. Linearnu nezavisnost skupa vektora utvrđujemo proverom vrednosti koeficijenata u linearnoj kombinaciji

$$
\begin{aligned}
&\alpha(1,2,1)+\beta(0,1,2)+\gamma(1,3,3)=(0,0,0)\\
\Leftrightarrow\ &(\alpha+\gamma,2\alpha+\beta+3\gamma,\alpha+2\beta+3\gamma)=(0,0,0). \qquad (0.1)
\end{aligned}
$$

To nas dovodi do homogenog sistema jednačina po koeficijentim $\alpha,\ \beta$ i γ

$$
\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ 2\alpha+\beta+3\gamma=0\\ \alpha+2\beta+3\gamma\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta=-\gamma.
$$

Zaključujemo da koeficijenti linearne kombinacije (0.1) ne moraju svi istovremeno biti nule, tj. skup vektora $\{(1,2,1),(0,1,2),(1,3,3)\}$ je linearno zavisan te nemože predstavljati bazu.

5. Dokazati da je

$$
X=\Big\{(\alpha,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma,0)\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\Big\}
$$

potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, a zatim odrediti dimenziju i jednu bazu prostora X.

Rešenje: Skup X je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ ako važi:

$$\begin{aligned} &1^\circ \qquad (\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X) \quad \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in X, \\ &2^\circ \qquad (\forall \mathbf{x} \in X)(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Dokažimo 1°. Neka su

$$\mathbf{x}_1 = (a_1, a_1 + b_1, a_1 + b_1 + c_1, 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_2 = (a_2, a_2 + b_2, a_2 + b_2 + c_2, 0)$$

proizvoljni vektori iz skupa X. Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 &= (a_1, a_1 + b_1, a_1 + b_1 + c_1, 0) + (a_2, a_2 + b_2, a_2 + b_2 + c_2, 0) \\ &= (a_1 + a_2, (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2), (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2), 0) \\ &= (a_1 + a_2, (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2), 0)\,. \end{aligned}$$

Uvodeći oznake

$$a_1 + a_2 = \alpha, \qquad b_1 + b_2 = \beta, \qquad c_1 + c_2 = \gamma$$

dobija se

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, 0) \in X.$$

Dokažimo 2°. Neka je $\mathbf{x} = (a, a + b, a + b + c, 0)$ proizvoljan vektor iz skupa X i $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljan skalar. Tada je

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{x} &= \lambda(a, a + b, a + b + c, 0) = (\lambda a, \lambda(a + b), \lambda(a + b + c), 0) \\ &= (\lambda a, \lambda a + \lambda b, \lambda a + \lambda b + \lambda c, 0). \end{aligned}$$

Ako označimo

$$\lambda a = \alpha, \qquad \lambda b = \beta, \qquad \lambda c = \gamma,$$

dobijamo

$$\lambda \mathbf{x} = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, 0) \in X.$$

Dakle, X je potprostor prostora $\mathbb{R}^4$. Odredimo mu dimenziju i jednu bazu. Proizvoljan vektor $\mathbf{x} = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, 0) \in X$ može da se predstavi na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, 0) = (\alpha, \alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta, 0) + (0, 0, \gamma, 0) \\ &= \alpha(1, 1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1, 0), \end{aligned}$$

to jest kao linearna kombinacija vektora

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 0), \qquad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 0), \qquad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Vektori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ su linearno nezavisni, jer važi:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_1(1,1,1,0) + \lambda_2(0,1,1,0) + \lambda_3(0,0,1,0) = (0,0,0,0) \\
\Leftrightarrow\quad & (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 0) = (0,0,0,0) \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Kako su vektori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linearno nezavisni i $L\left(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}\right) = X$, oni čine bazu u prostoru X. Dimenzija prostora jednaka je broju vektora u bazi, pa je $\dim X = 3$.

6. Dokazati da je

$$X = \Big\{(-\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\Big\}$$

potprostor prostora $\mathbb{R}^4$. Odrediti dimenziju i jednu bazu prostora X.

Rešenje: Dokažimo da važi

$$(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X)(\forall \mu, \nu \in \mathbb{R}) \quad \mu\mathbf{x}_1 + \nu\mathbf{x}_2 \in X.$$

Neka su $\mathbf{x}_1 = (-a_1, a_1, a_1 + b_1, b_1)$ i $\mathbf{x}_2 = (-a_2, a_2, a_2 + b_2, b_2)$ proizvoljni vektori iz skupa X i $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari. Tada je

$$\begin{aligned}
\mu\mathbf{x}_1 + \nu\mathbf{x}_2 &= \mu(-a_1, a_1, a_1 + b_1, b_1) + \nu(-a_2, a_2, a_2 + b_2, b_2) \\
&= (\mu(-a_1) + \nu(-a_2), \mu a_1 + \nu a_2, \mu(a_1 + b_1) + \nu(a_2 + b_2), \mu b_1 + \nu b_2) \\
&= (-(\mu a_1 + \nu a_2), \mu a_1 + \nu a_2, (\mu a_1 + \nu a_2) + (\mu b_1 + \nu b_2), \mu b_1 + \nu b_2)\,.
\end{aligned}$$

Uvodeći oznake

$$\mu a_1 + \nu a_2 = \alpha, \qquad \mu b_1 + \nu b_2 = \beta,$$

dobija se

$$\mu\mathbf{x}_1 + \nu\mathbf{x}_2 = (-\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta) \in X.$$

Prema tome, X je potprostor prostora $\mathbb{R}^4$. Odredimo bazu i dimenziju prostora X. Kako proizvoljan vektor $\mathbf{x} = (-\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta) \in X$ može da se predstavi u obliku

$$\mathbf{x} = (-\alpha, \alpha, \alpha + \beta, \beta) = (-\alpha, \alpha, \alpha, 0) + (0, 0, \beta, \beta) = \alpha(-1, 1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1, 1),$$

zaključujemo da je $X = L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$, gde je $\mathbf{u}_1 = (-1,1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,1,1)$. Pored toga, vektori $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ su linearno nezavisni jer važi

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_1(-1,1,1,0) + \lambda_2(0,0,1,1) = (0,0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \quad (-\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.\end{aligned}$$

Zato $\{(-1,1,1,0),(0,0,1,1)\}$ predstavlja bazu u prostoru X i $\dim X = 2$.

7. a) Dokazati da je

$$X = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$$

vektorski prostor.

b) Odrediti dimenziju i jednu bazu prostora X.

Rešenje: a) Kako je $X \subset \mathbb{R}^3$, dovoljno je dokazati da je on potprostor prostora $\mathbb{R}^3$. Neka su $\mathbf{x}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ i $\mathbf{x}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ proizvoljni vektori iz X i $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari. Tada je

$$\mu\mathbf{x}_1 + \nu\mathbf{x}_2 = \mu(a_1,b_1,c_1) + \nu(a_2,b_2,c_2) = (\mu a_1 + \nu a_2, \mu b_1 + \nu b_2, \mu c_1 + \nu c_2) = (a,b,c).$$

Kako je $a_1 + b_1 + c_1 = 0$ i $a_2 + b_2 + c_2 = 0$, važi

$$a+b+c = (\mu a_1 + \nu a_2) + (\mu b_1 + \nu b_2) + (\mu c_1 + \nu c_2) = \mu(a_1+b_1+c_1) + \nu(a_2+b_2+c_2) = 0,$$

zaključuje se da $\mu\mathbf{x}_1 + \nu\mathbf{x}_2 \in X$.

b) Za proizvoljan vektor $\mathbf{x} = (a,b,c) \in X$ važi $a+b+c=0$, tj. $c = -a-b$, pa on može da se predstavi na sledeći način:

$$\mathbf{x} = (a,b,c) = (a,b,-a-b) = a(1,0,-1) + b(0,1,-1) = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2,$$

gde je $\mathbf{u}_1 = (1,0,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$. Vektori $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ su linearno nezavisni jer važi

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(0,1,-1) = (0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2) = (0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.\end{aligned}$$

Zato vektori $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ čine bazu u prostoru X, pa je $\dim X = 2$.

8. Dat je vektorski prostor

$$X = \{(3x, 2x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

u odnosu na uobičajene operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom. Odrediti dimenziju i jednu bazu vektorskog prostora X.

Rešenje: Proizvoljan vektor $\mathbf{u} \in X$ može da se predstavi u obliku

$$\mathbf{u} = (3x, 2x, y) = x(3, 2, 0) + y(0, 0, 1).$$

Kako su vektori $(3, 2, 0)$ i $(0, 0, 1)$ linearno nezavisni, oni čine bazu u prostoru X, pa je $\dim X = 2$.

9. Dokazati da je

$$X = \Big\{(\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\Big\}$$

potprostor prostora $\mathbb{R}^4$. Odrediti bazu i dimenziju prostora X.

Rešenje: Za proizvoljni vektor $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \gamma) \in X$ važi $\alpha + \beta + \gamma = 0$, pa je $\beta = -\alpha - \gamma$, tj. $\mathbf{u} = (\alpha, -\alpha - \gamma, \gamma, \alpha + \gamma)$. Zbog toga skup X može da se predstavi u obliku

$$X = \Big\{(\alpha, -\alpha - \gamma, \gamma, \alpha + \gamma) \mid \alpha, \gamma \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Na način prikazan u rešenjima zadataka **4.** i **5.** zaključuje se da je X potprostor prostora $\mathbb{R}^4$, $\dim X = 2$, a jedna baza je $\{(1, -1, 0, 1), (0, -1, 1, 1)\}$.