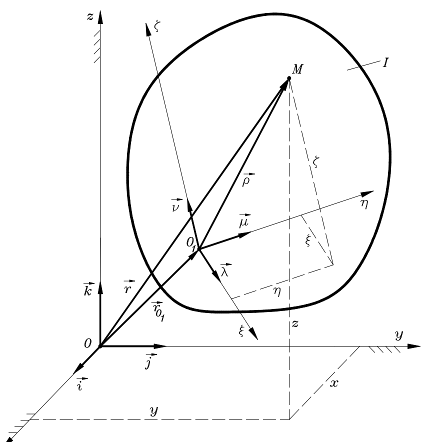
Složeno kretanje tačke

Relativno, prenosno i apsolutno kretanje tačke



Za proučavanje složenog kretanja tačke potrebno je neko pokretno telo *I* i tačka *M* koja se kreće po njemu. Kretanje tačke *M* u odnosu na nepokretan koordinatni sistem *Oxyz* naziva se apsolutno kretanje i određeno je parametarskim jednačinama kretanja

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

ili $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Brzina i ubrzanje tačke *M* u odnosu na koordinatni sistem *Oxyz* naziva se apsolutna brzina, odnosno apsolutno ubrzanje tačke *M*. Kretanje tačke *M* u odnosu na pokretni koordinatni sistem $O_1\xi\eta\varsigma$, naziva se relativno kretanje i određeno je sledećim parametarskim jednačinama

$$\xi = \xi(t), \; \eta = \eta(t), \; \varsigma = \varsigma(t),$$

što se može izraziti u sledećem vektorskom obliku

$$\vec{\rho} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \varsigma\vec{\nu}.$$

Kretanje tačke tela *I*, sa kojom se u datom trenutku poklapa tačka *M*, naziva se prenosno kretanje. Prenosna brzina i prenosno ubrzanje tačke su brzina i ubrzanje one tačke tela *I* sa kojom se posmatrana tačka poklapa u datom trenutku.

Brzina tačke pri složenom kretanju (apsolutna brzina tačke)

Položaj tačke *M* u odnosu na nepokretni koordinatni sistem *Oxyz* određen je sa

$$\vec{r} = \vec{r}_{o_1} + \vec{\rho} = \vec{r}_{o_1} + \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \varsigma\vec{\nu} \;,$$

gde je $\vec{r}_{o_1} = \overrightarrow{OO_1}$ a $\vec{\rho} = \overrightarrow{O_1M}$. Tada je

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{o_1} + \dot{\vec{\rho}},$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\varsigma}\vec{\nu} + \xi\dot{\vec{\lambda}} + \eta\dot{\vec{\mu}} + \varsigma\dot{\vec{\nu}}.$$

Prva tri člana na desnoj strani prethodnog izraza karakterišu brzinu promene vektora $\vec{\rho}$ u odnosu na pokretni koordinatni sistem $O_1\xi\eta\varsigma$. Taj deo izvoda po vremenu $\dot{\vec{\rho}}$ predstavlja lokalni (relativni) izvod po vremenu vektora $\dot{\vec{\rho}}$, odnosno relativnu brzinu tačke *M*, tako da važi

$$\vec{V}_r = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt} = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\varsigma}\vec{\nu} \cdot$$

Preostala tri člana u izrazu za $\dot{\vec{\rho}}$ karakterišu promenu vektora $\vec{\rho}$ koja je posledica kretanja koordinatnog sistema $O_1\xi\eta\varsigma$ u odnosu na koordinatni sistem *Oxyz*. Izvodi po vremenu jediničnih vektora $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ određeni su na sledeći način

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega}\times\vec{\lambda}, \qquad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega}\times\vec{\mu}, \qquad \dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega}\times\vec{\nu},$$

gde je $\vec{\omega}$ vektor trenutne ugaone brzine obrtanja tela *I* oko uslovno nepokretne tačke O_1. Zamenom ovih relacija dobija se

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_r + \xi(\vec{\omega}\times\vec{\lambda}) + \eta(\vec{\omega}\times\vec{\mu}) + \varsigma(\vec{\omega}\times\vec{\nu}), \;\; \dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times(\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \varsigma\vec{\nu}),$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\rho} = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho} \cdot$$

Apsolutna brzina tačke *M* može se sada izraziti kao $\vec{V} = \vec{V}_{o_1} + \vec{\omega}\times\vec{\rho} + \vec{V}_r$. Ako se tačka *M* ne kreće po telu *I*, tada je $\vec{V}_r = 0$ i prethodni izraz svodi se tada na prenosnu brzinu tačke *M*

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{o_1} + \vec{\omega}\times\vec{\rho} \cdot$$

Prethodnim izrazom određena je brzina one tačke tela *I*, koje vrši opšte kretanje, sa kojom se u datom trenutku poklapa tačka *M*. Iz svega prethodnog proizilazi da je apsolutna brzina tačke *M* jednaka zbiru prenosne i relativne brzine, tj.

$$\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_r \cdot$$

Intenzitet, pravac i smer apsolutne brzine određen je, npr. projekcijama na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema *Oxyz*, tj.

$$V_x = V_{px} + V_{rx}, \qquad V_y = V_{py} + V_{ry}, \qquad V_z = V_{pz} + V_{rz}.$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad cos\angle(\vec{V},\vec{i}\,) = \frac{V_x}{V}, \quad cos\angle(\vec{V},\vec{j}\,) = \frac{V_y}{V}, \quad cos\angle(\vec{V},\vec{k}\,) = \frac{V_z}{V}.$$

Ubrzanje tačke pri složenom kretanju (apsolutno ubrzanje tačke)

Izraz za apsolutno ubrzanje tačke *M* koja se kreće po telu *I* nalazi se određivanjem izvoda po vremenu izraza za apsolutnu brzinu tačke *M*, tj.

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V}}_{o_1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{V}}_r,$$

pri čemu je $\dot{\vec{V}}_{o_1} = \vec{a}_{o_1}$ - ubrzanje pola translacije, $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ - prenosno ugaono ubrzanje tj. ugaono ubrzanje tela *I*. Analogno izrazu za brzinu može se pisati

$$\dot{\vec{V}}_r = \frac{d_r\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r, \quad \vec{a}_r = \frac{d_r\vec{V}_r}{dt} = \frac{d_r^2\vec{\rho}}{dt^2} = \ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \ddot{\varsigma}\vec{\nu}.$$

Relativno ubrzanje $\vec{a}_r$ tačke *M* govori o promeni relativne brzine $\vec{V}_r$ usled relativnog kretanja. Kada koordinatni sistem $O_1\xi\eta\varsigma$ miruje, tj. kada se telo *I* ne kreće, sledi da je

$$\vec{a} = \vec{a}_r.$$

Na osnovu prethodno rečenog, izraz za apsolutno ubrzanje tačke *M* moguće je napisati u obliku

$$\vec{a} = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}\,) + \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r, \quad \vec{a} = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\,\vec{\omega} \times \vec{\rho}\,) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

Kada tačka *M* ne vrši relativno kretanje, tj. $\vec{V}_r = 0$ i $\vec{a}_r = 0$, prethodni izraz svodi se na prenosno ubrzanje tačke *M*

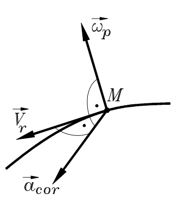
$$\vec{a}_p = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\,\vec{\omega} \times \vec{\rho}\,), \quad \vec{a}_p = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_M^{O_1}.$$

Izraz $2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$ naziva se Koriolisovo ubrzanje tačke *M*, obeležava se sa $\vec{a}_{cor}$, tj.

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

Intenzitet vektora $\vec{a}_{cor}$ određen je sa $a_{cor} = 2\omega V_r\, sin\angle(\,\vec{\omega},\vec{V}_r\,)$. Očigledno je da je Koriolisovo ubrzanje $\vec{a}_{cor}$ jednako nuli u sledećim slučajevima:

1) $\omega = 0$, tj. kada se telo po kome se kreće tačka, kreće translatorno; *2)* $V_r = 0$, tj. kada se tačka ne kreće relativno; *3)* $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_r$, tj. kada su vektori trenutne ugaone brzine tela po kome se kreće tačka i relativne brzine tačke paralelni.



Pravac vektora Koriolisovog ubrzanja $\vec{a}_{cor}$ upravan je na ravan koju obrazuju vektori trenutne ugaone brzine tela po kome se kreće tačka $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}_p$ i relativne brzine tačke $\vec{V}_r$, a smer je takav da se posmatrano sa kraja vektora $\vec{a}_{cor}$ obrtanje vektora $\vec{\omega}$ najkraćim putem do poklapanja sa vektorom $\vec{V}_r$, vidi kao matematički pozitivno. Na osnovu prethodnog proizilazi da je apsolutno ubrzanje tačke *M* jednako zbiru prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja, tj.

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}.$$

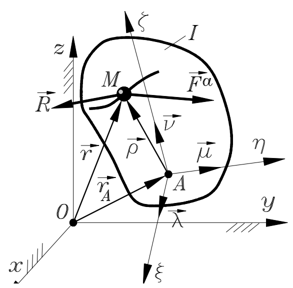
Intenzitet, pravac i smer vektora apsolutnog ubrzanja tačke *M* može se odrediti pomoću projekcija na ose nepokretnog Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema *Oxyz*, tj.

$$a_x = a_{px} + a_{rx} + a_{corx}, \; a_y = a_{py} + a_{ry} + a_{cory}, \; a_z = a_{pz} + a_{rz} + a_{corz}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad cos\angle(\,\vec{a},\vec{i}\,) = \frac{a_x}{a}, \quad cos\angle(\,\vec{a},\vec{j}\,) = \frac{a_y}{a}, \quad cos\angle(\,\vec{a},\vec{k}\,) = \frac{a_z}{a}.$$

Dinamika relativnog kretanja tačke

Diferencijalne jednačine relativnog kretanja tačke



Kretanje tačke u odnosu na inercijalne koordinatne siteme koji se smatraju uslovno nepokretnim naziva se apsolutno kretanje tačke. Postoji čitav niz problema kretanja tačke koja se kreće u odnosu na neko telo, pri čemu se to telo kreće na proizvoljan način u odnosu na inercijalni koordinatni sistem. Mnoge od ovih problema pogodnije je posmatrati u odnosu na neinercijalne koordinatne sisteme vezane za to pokretno telo. Kretanje tačke u odnosu na takve koordinatne sisteme naziva se relativno kretanje tačke. U odnosu na takve koordinatne sisteme, u opštem slučaju, neće važiti osnovna jednačina dinamike tačke.

Osnovna jednačina dinamike tačke, u odnosu na inercijalni (uslovno nepokretni) koordinatni sistem *Oxyz* je: $m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R}$, gde je $\vec{a}$ apsolutno ubrzanje posmatrane tačke, $\vec{F}^a$ rezultanta svih aktivnih sila koje deluju na tačku, a $\vec{R}$ reakcija veze. Poznato je iz kinematike da važi

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}, \qquad \vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}), \qquad \vec{a}_r = \frac{d_r \vec{V}_r}{dt} = \frac{d_r^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \ddot{\xi}\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\vec{\mu} + \ddot{\varsigma}\vec{\nu}$$

$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r$, gde je: $\vec{a}_A$ - ubrzanje tačke *A* (pola translacije), $\vec{\omega}_p$ - prenosna ugaona brzina (ugaona brzina tela *I* u odnosu na inercijalni koordinatni sistem), $\vec{\varepsilon}_p$ - prenosno ugaono ubrzanje (ugaono ubrzanje tela *I* u odnosu na inercijalni koordinatni sistem), $\vec{\rho} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \varsigma\vec{\nu}$ - vektor položaja tačke u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$, $\vec{V}_r$ - relativna brzina tačke M, tj. $\vec{V}_r = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt} = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\varsigma}\vec{\nu}$, pri čemu je sa $\frac{d_r}{dt}$ označen lokalni (relativni) izvod po vremenu, i gde su $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ - jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$. Sada je $m\vec{a}_p + m\vec{a}_r + m\vec{a}_{cor} = \vec{F}^a + \vec{R}$, odnosno $m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} - m\vec{a}_p - m\vec{a}_{cor}$. Ako se uvedu oznake $-m\vec{a}_p = \vec{F}_p^{in}$, $-m\vec{a}_{cor} = \vec{F}_{cor}^{in}$, prethodna jednačina dobija oblik

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{cor}^{in}.$$

Vektori $\vec{F}_p^{in}$ i $\vec{F}_{cor}^{in}$ imaju dimenziju sile, a njihov smer je suprotan od smera vektora ubrzanja $\vec{a}_p$ i $\vec{a}_{cor}$, respektivno. Vektor $\vec{F}_p^{in}$ naziva se prenosna inercijalna sila, a vektor $\vec{F}_{cor}^{in}$ - Koriolisova inercijalna sila.

Prethodna jednačina određuje kretanje tačke u odnosu na neinercijalni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ i ona se naziva osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja tačke.

U opštem slučaju, prenosna inercijalna sila ima tri komponente: $\vec{F}_{pA}^{in} = -m\vec{a}_A$ - prenosna translatorna, $\vec{F}_{p1}^{in} = -m(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho})$ - prenosna obrtna i $\vec{F}_{p2}^{in} = -m(\vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}))$ - prenosna aksipetalna.

Ako je za neinercijalni (pokretni) koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ izabran Dekartov pravougli koordinatni sistem, tada je

$$m\ddot{\xi} = F_\xi^\alpha + R_\xi + F_{p\xi}^{in} + F_{cor\xi}^{in}, \; m\ddot{\eta} = F_\eta^\alpha + R_\eta + F_{p\eta}^{in} + F_{cor\eta}^{in}, \; m\ddot{\zeta} = F_\zeta^\alpha + R_\zeta + F_{p\zeta}^{in} + F_{cor\zeta}^{in}.$$

Ako je za neinercijalni (pokretni) koordinatni sistem izabran prirodni trijedar, u tački relativne putanje, tada se dobijaju sledeće skalarne diferencijalne jednačine relativnog kretanja tačke

$$m\frac{dV_r}{dt} = F_t^a + R_t + F_{pt}^{in}, \quad m\frac{V_r^2}{R_k} = F_n^a + R_n + F_{pn}^{in} + F_{cor\,n}^{in}, \quad 0 = F_b^a + R_b + F_{pb}^{in} + F_{cor\,b}^{in}.$$

Relativna ravnoteža tačke

Pod relativnom ravnotežom (mirovanjem) tačke podrazumeva se njeno mirovanje u odnosu na neinercijalni koordinatni sistem. Tada je $\vec{V}_r = 0$, $\vec{a}_r = 0$ i $\vec{F}_{cor}^{in} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r = 0$, pa je

$$0 = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in}.$$

Ova jednačina predstavlja jednačinu relativne ravnoteže tačke.

Teorema o promeni kinetičke energije pri relativnom kretanju tačke

Diferencijalna jednačina relativnog kretanja tačke je

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} - 2m(\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r)\,.$$

Množeći skalarno, relativnom brzinom tačke $\vec{V}_r = \dfrac{d_r\vec{\rho}}{dt} = \dot{\xi}\,\vec{\lambda} + \dot{\eta}\,\vec{\mu} + \dot{\varsigma}\,\vec{\nu}$, levu i desnu stranu prethodne jednačine, sledi

$$m\vec{V}_r \cdot \frac{d_r\vec{V}_r}{dt} = \vec{F}^a \cdot \vec{V}_r + \vec{R} \cdot \vec{V}_r + \vec{F}_p^{in} \cdot \vec{V}_r - 2m(\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r) \cdot \vec{V}_r\,.$$

Kako je $(\vec{\omega} \times \vec{V}_r) \cdot \vec{V}_r = 0$, tj. $m\vec{V}_r \cdot d_r\vec{V}_r = \vec{F}^a \cdot d_r\vec{\rho} + \vec{R} \cdot d_r\vec{\rho} + \vec{F}_p^{in} \cdot d_r\vec{\rho}$. Leva strana ove jednačine može se transformisati na sledeći način $m\vec{V}_r \cdot d_r\vec{V}_r = d_r\left(\dfrac{1}{2} mV_r^2\right) = dE_{kr}$, što znači da predstavlja diferencijal kinetičke energije tačke pri njenom relativnom kretanju. Sabirci na desnoj strani jednačine predstavljaju elementarne radove odgovarajućih sila na relativnoj putanji tačke. To znači da se ta jednačina može pisati u obliku

$$dE_{kr} = \delta A_r\left(\vec{F}^a\right) + \delta A_r\left(\vec{R}\right) + \delta A_r\left(\vec{F}_p^{in}\right),$$

što predstavlja diferencijalni oblik teoreme o promeni kinetičke energije tačke pri njenom relativnom kretanju i može se formulisati na sledeći način: diferencijal kinetičke energije tačke, pri njenom relativnom kretanju, jednak je zbiru elementarnih radova na relativnom pomeranju rezultante svih aktivnih sila, reakcije veze i prenosne inercijalne sile.

Integracijom, u odgovarajućim granicama relativne brzine tačke, od V_{r_1} do V_{r_2} i u granicama od položaja M_1 do položaja M_2 relativne putanje, tj.

$$\int_{V_{r_1}}^{V_{r_2}} d_r\left(\frac{1}{2} mV_r^2\right) = \int_{M_1}^{M_2} \delta A_r\left(\vec{F}^a\right) + \int_{M_1}^{M_2} \delta A_r\left(\vec{R}\right) + \int_{M_1}^{M_2} \delta A_r\left(\vec{F}_p^{in}\right),$$

dobija se

$$\frac{1}{2} mV_{r_2}^2 - \frac{1}{2} mV_{r_1}^2 = A_{r(M_1M_2)}\left(\vec{F}^a\right) + A_{r(M_1M_2)}\left(\vec{R}\right) + A_{r(M_1M_2)}\left(\vec{F}_p^{in}\right),$$

što predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije tačke u konačnom obliku, pri njenom relativnom kretanju, a koja se može formulisati na sledeći način: konačna promena kinetičke energije tačke, pri njenom relativnom kretanju, na nekom konačnom relativnom pomeranju tačke, jednaka je zbiru radova svih aktivnih sila, reakcija veza i prenosne inercijalne sile na tom istom relativnom pomeranju tačke.