Magnetske pojave u bile su poznate još u antičkoj Grčkoj, kada je zapaženo da komadi gvozdene rude magnetita privlače sitnije komadiće gvožđa. Komadi magnetita predstavljaju *prirodne magnete*. Kasnije je primećeno da kada se predmeti od gvožđa nađu u blizini prirodnih magneta i sami postaju magneti, pošto se spontano *namagnetišu*. Tako dobijeni magneti zovu se *veštački magneti*. Magnet u obliku tanke igle obešene o tanku nit tako da se može obrtati oko vertikalne ose, uvek zauzima pravac sever-jug. Pol magneta okrenut ka severu zove se severni (**N**), a pol okrenut ka jugu, zove se južni pol magneta (**S**).

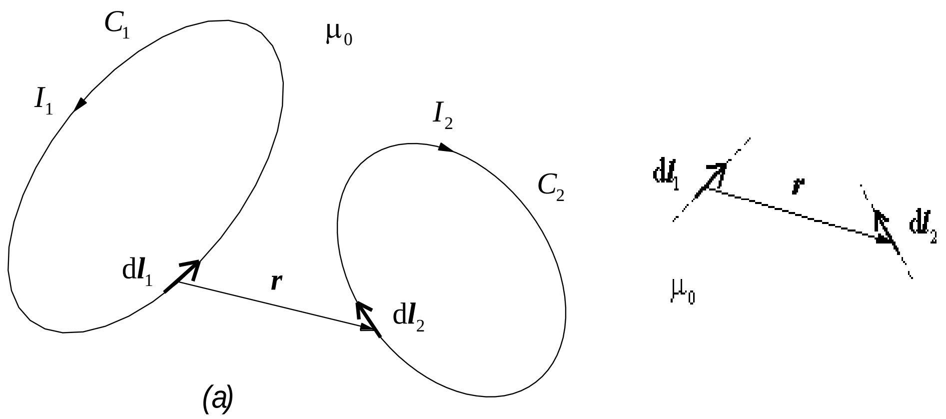
Ersted je pokazao da u okolini provodnika kroz koji protiče električna struja postoji magnetno polje. Amper je pronašao zakon o magnetskoj sili između dva *strujna elementa* i postavio smelu hipotezu o postojanju veoma malih mikrostruja unutar stalnih magneta, koje je označio kao uzročnike svih magnetskih pojava. Danas je poznato da ove mikrostruje potiču od orbitalnog kretanja i spina elektrona, kao i spina jezgra u atomima supstancije.

Bio, Savar i Laplas formulisali su matematički izraz za *magnetsku indukciju* kao vektorsku veličinu koja opisuje magnetsko polje. Faradej je otkrio *zakon elektromagnetske indukcije* i pojavu da je vremenski promenljivo magnetsko polje uvek praćeno vremenski promenljivim električnim poljem.

Električno i magnetsko polje su međusobno povezani u jedinstveno elektromagnetsko polje, a elektrostatičko i vremenski konstantno magnetsko polje samo su njegovi specijalni slučajevi. Električne i magnetske pojave potiču od elementarnih naelektrisanih čestica. Jedina razlika između njih je u tome što se električni efekti javljaju i dok čestice miruju, a magnetski samo kada se čestice kreću.

Amperov zakon za magnetsku silu između strujnih elemenata u vakuumu

Posmatrajmo dve tanke strujne konture u vakuumu: C_1 sa vremenski konstantnom strujom I_1 i C_2 sa vremenski konstantnom strujom I_2, koje se nalaze u položaju prikazanom na sl. 1. Ako je potrebno *izračunati* magnetsku silu međusobnog dejstva ove dve strujne konture, primenjuje se *diferencijalno-integralni* metod: prvo se svaka kontura predstavi preko svojih nadovezanih *strujnih elemenata* $I_1 \cdot d\boldsymbol{l}_1$ i $I_2 \cdot d\boldsymbol{l}_2$, zatim se odrede sve elementarne magnetske sile između tih elemenata i konačno se izvrši vektorska integracija dobijenih elementarnih sila.



Sl. 1

Utvrđeno je da se u svim slučajevima strujnih kontura u vakuumu dobija tačan izraz za rezultantnu magnetsku silu, koja se može relativno lako i izmeriti, ako se pretpostavi da je elementarna magnetska sile $d\boldsymbol{F}_{12}$ kojom strujni element $I_1 \cdot d\boldsymbol{l}_1$ deluje na strujni element $I_2 \cdot d\boldsymbol{l}_2$ sledećeg oblika:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I_1\cdot I_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r})}{r^3}\quad,\ r=|\mathbf{r}|,$$

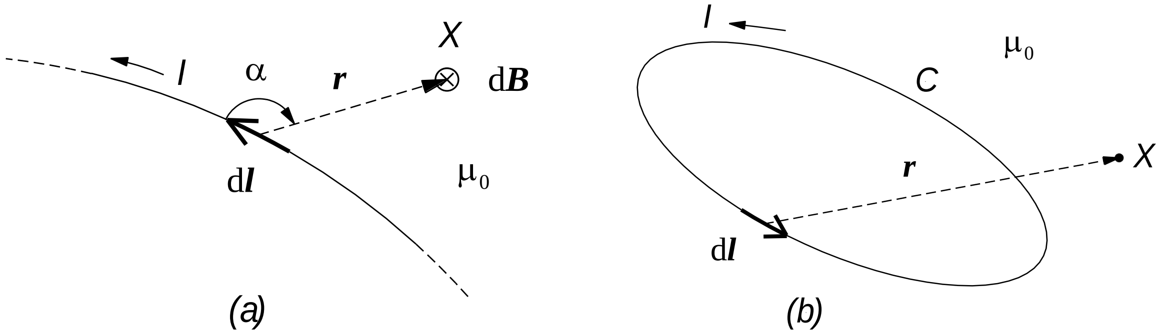
gde je $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ [N/A^2] vrednost za *magnetsku permeabilnost vakuuma* (a veoma približno i vazduha) i $\boldsymbol{r}$ –vektor položaja strujnog elementa $I_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ u odnosu na strujni element $I_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$. Navedeni izraz je *Amperov zakon za magnetsku silu između strujnih elemenata u vakuumu.*

Vektor magnetske indukcije. Bio-Savarov zakon i njegova primena

Amperov zakon za strujne elemente može napisati u sledećem obliku:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=I_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=I_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times d\boldsymbol{B}_1\,.$$

Na osnovu prethodne relacije moguće je uvesti vektorsku veličinu $\boldsymbol{B}$ koja karakteriše magnetsko polje i koja se zove *vektor magnetske indukcije* (ili *vektor gustine magnetskog fluksa*). Jedinica za jačinu, ili intenzitet $B=|\boldsymbol{B}|$ magnetske indukcije nosi naziv *Tesla* ([T]).



Sl. 2

Vektor elementarne indukcije d$\boldsymbol{B}$ magnetskog polja koje u tački X (sl. 2a) stvara strujni element Id$\boldsymbol{l}$ strujne konture C (sl. 2b) sa strujom jačine I, može se odrediti iz relacije (***Bio Savarov* zakon**):

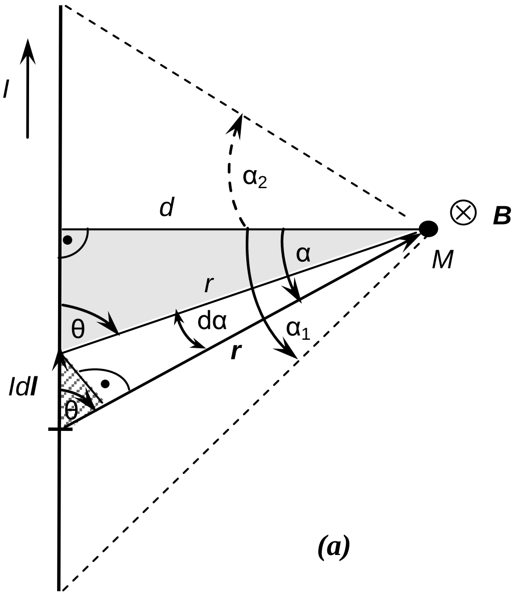
$$\mathrm{d}\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}\quad\wedge\quad \mathrm{d}B=|\mathrm{d}\mathbf{B}|=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot \mathrm{d}l\cdot\sin\alpha}{r^2},\quad dl=|\,\mathrm{d}\mathbf{l}\,|,\ r=|\,\boldsymbol{r}\,|\ \leftarrow$$

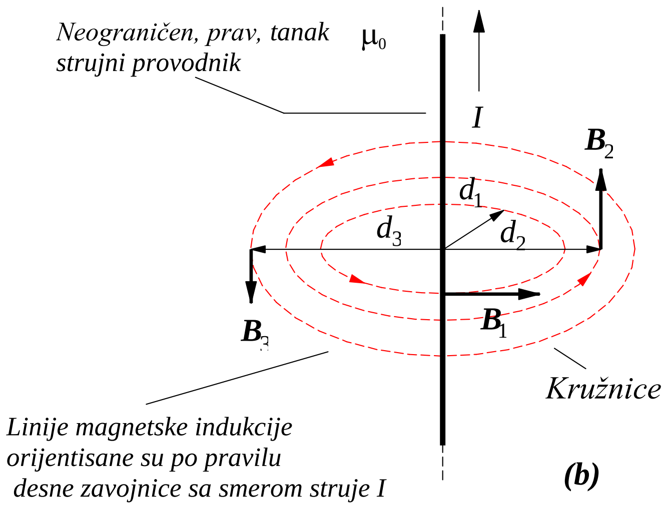
odakle sledi da je *pravac* vektora $\boldsymbol{B}$ u tački X *normalan* na ravan koju čine vektori $\boldsymbol{r}$ i d$\boldsymbol{l}$. Vektor $\boldsymbol{B}$ je orijentisan u smeru napredovanja desne zavojnice kada se ona okreće u smeru koji najkraćim putem dovodi do poklapanja vektora d$\boldsymbol{l}$ i $\boldsymbol{r}$. Orijentisani ugao između vektora d$\boldsymbol{l}$ i $\boldsymbol{r}$ označen je sa α. U slučaju na sl. 2a vektor elementarne indukcije d$\boldsymbol{B}$ usmeren je kao odlazeća strela ("⊗") kada je jačina struje $I>0$, a kao dolazeća ("⊙") kada je $I<0$.

Magnetska indukcija $\boldsymbol{B}$ koju u tački X stvara strujna kontura C u vakuumu (sl. 2b) može se odrediti *vektorskom integracijom* indukcija pojedinih strujnih elemenata te konture. Strujna kontura proizvoljnog oblika može se uvek dekomponovati u konačan broj linijskih (ili dužnih) i lučnih segmenata, pa se indukcija $\boldsymbol{B}$ u bilo kojoj tački magnetskog polja, u opštem slučaju, dobija vektorskom integracijom indukcija koje u toj tački stvaraju "strujne duži" i "strujni lukovi" ponaosob.

Magnetska indukcija „strujne duži" i „strujne prave“

Na sl. 3a prikazana je "strujna duž" u vakuumu sa vremenski konstantnom ili vremenski sporo promenljivom strujom I. Odredimo pravac, smer i intenzitet vektora indukcije u proizvoljnoj tački M izvan prave određene datom duži. Orijentisani ugao α_2 je pozitivan, jer se ugao „meri“ od normale na provodnik u smeru toka struje *I* (α_2 se nalazi „iznad“ normale), a ugao α_1 je negativan (nalazi se „ispod“ normale).





Sl. 3

Prema Bio-Savarovom zakonu je:

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$, $r=|\mathbf{r}|$, $\mathrm{d}B=|\mathrm{d}\boldsymbol{B}|=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{d}l\cdot\sin\theta}{r^2}$ sa pravcem i smerom kao na sl. 3a.

Iz manjeg osenčenog pravouglog trougla sledi $dl\cdot\sin\theta=r\cdot\mathrm{d}\alpha$, gde je $\mathrm{d}\alpha$ ugao pod kojim se element provodnika dl "vidi" iz tačke *M*.

Zamenom dobijamo $\mathrm{d}B=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{d}l\cdot\sin\theta}{r^2}=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\cdot\dfrac{r\cdot\mathrm{d}\alpha}{r^2}=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{r}$.

Iz većeg zasivljenog pravouglog trougla sledi $\cos\alpha=d/r$, odnosno $r\cdot\cos\alpha=d$, pa je onda:

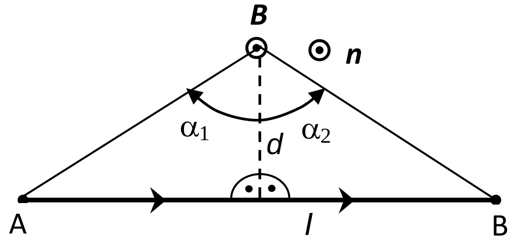
$\mathrm{d}B=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{r}=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{d/\cos\alpha}=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi d}\cdot\cos\alpha\cdot d\alpha$. Integracijom po „strujnoj duži“, dobijamo:

$B=|\boldsymbol{B}|=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi\cdot d}\cdot\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha=\dfrac{\mu_0\cdot I}{4\pi\cdot d}\cdot\left(\sin\alpha_2\text{-}\sin\alpha_1\right)$, gde je $\alpha_2>0$ i $\alpha_1<0$.

Magnetska indukcija „strujne duži“ (AB) je:

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)\cdot\boldsymbol{n}$$

$$\alpha_2>0\,,\ \alpha_1<0$$

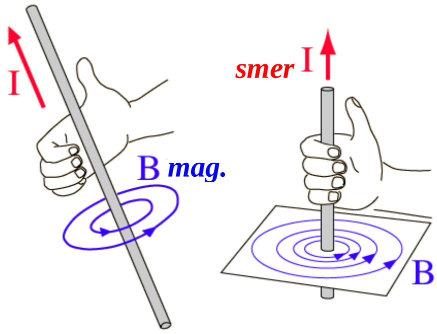


Specijalni slučaj „strujne duži" je „strujna prava“, koji se dobija kada $\alpha_2\to+\pi/2$ i $\alpha_1\to-\pi/2$:

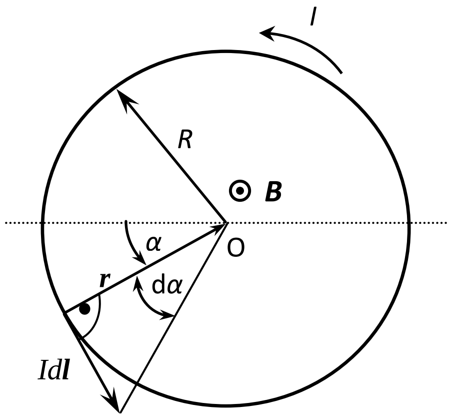
$$B=|\boldsymbol{B}|=\frac{\mu_0\cdot I}{4\pi\cdot d}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}\ \text{-}\ \sin(\text{-}\frac{\pi}{2})\right)=\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi\cdot d}.$$

Zbog aksijalne simetrije posmatranog sistema, spektar linija magnetskog polja je aksijalno simetričan (sl. 3.b). Primetimo da je u tačkama na osi provodnika magnetska indukcija $\boldsymbol{B}$=**0**.

Pravac i smer vektora magnetske indukcije ***B*** mogu se odrediti i po **pravilu desne šake**: palac desne ruke postavi se u referentnom smeru struje, a preostali skupljeni prsti određuju pravac i smer vektora magnetske indukcije



Zadatak 1: Odrediti magnetsku indukciju u centru kružnog provodnika sa strujom *I*, a zatim odrediti magnetsko polje u centru kruga za provodnike savijene u obliku polovine i četvrtine kruga.



Rešenje:

Elementarna indukcija $d\boldsymbol{B}$, koju stvara strujni element $Id\boldsymbol{l}$ u centru kruga je:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cdot r}{r^3}\sin\angle(d\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$, sa pravcem i smerom kao na slici.

Zamenom $r = R$ i $dl = Rd\alpha$ sledi $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{R^2}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}d\alpha$.

Integracijom po uglu α po obimu kružnice konačno se dobija:

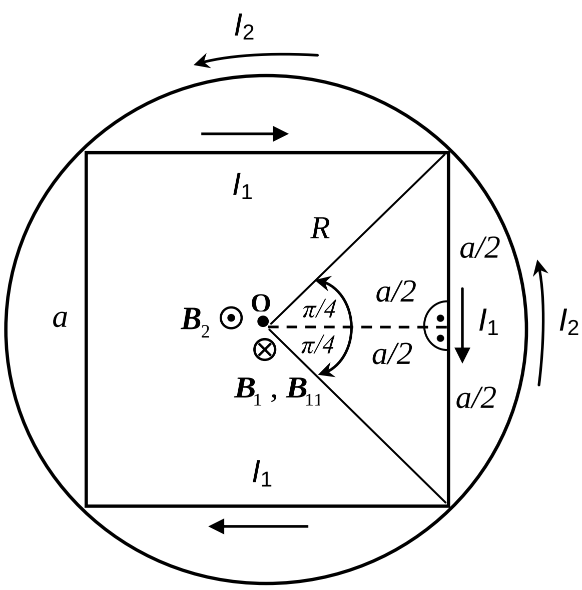
$$B = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{2\pi}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}2\pi = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}$$, sa pravcem i smerom kao na slici.

Intenzitet magnetske indukcije provodnika savijenog u obliku polovine i četvrtine kruga jeste

$$B = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{\pi}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\pi = \frac{\mu_0}{4}\frac{I}{R}$$, za polovinu kruga, odnosno

$$B = \int_0^{\pi/2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{\pi/2}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0}{8}\frac{I}{R}$$, za četvrtinu kruga.

Zadatak 2: Kružno kolo poluprečnika *R* opisano je oko kvadratnog kola stranice *a* u kome teče struja I_1=2π[A] u označenom smeru. Odrediti struju I_2 koja treba da teče u kružnom kolu da bi magnetno polje u centru kruga, tački O, bilo jednako nuli.



Rešenje:

Primetimo da je $2R = a\sqrt{2}$, odnosno $a = \sqrt{2}\cdot R$.

Intenzitet magnetne indukcije $\boldsymbol{B}_{11}$, koja potiče od struje I_1 u jednoj od stranica kvadrata, u centru kvadrata je:

$$B_{11} = \frac{\mu_0\cdot I_1}{4\pi\cdot(a/2)}\left(\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(-\frac{\pi}{4})\right) = \frac{\mu_0\cdot I_1}{2\pi a}\sqrt{2}$$

sa pravcem i smerom kao na slici. Kako su u centru kvadrata, zbog simetrije, magnetske indukcije svih stranica kvadrata jednake po intenzitetu, pravcu i smeru, to je rezultantna indukcija:

$$B_1 = 4B_{11} = 4\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi a}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,\frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi a}.$$

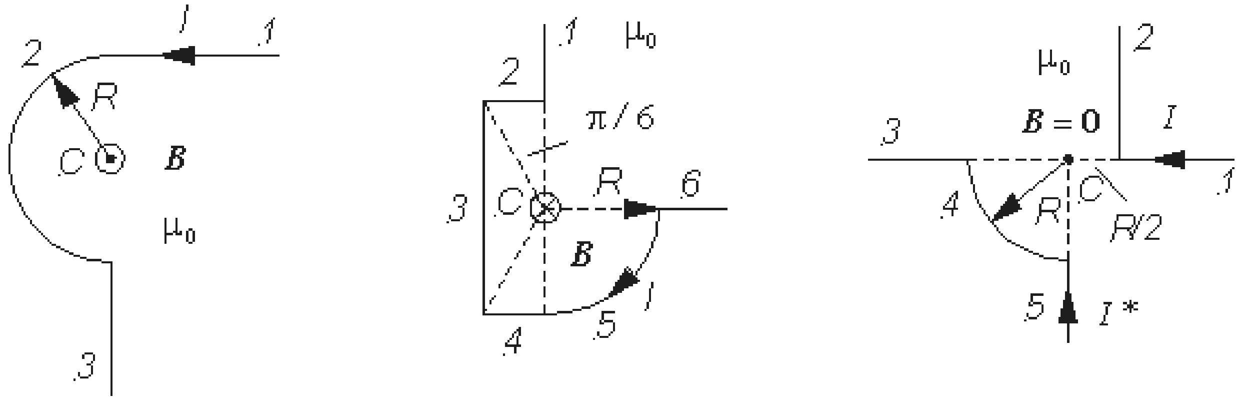
U kružnom kolu mora se uspostaviti struja I_2 suprotnog smera od struje I_1. Koristeći izraz za magnetnu indukciju u centru kružnog kola iz prethodnog zadatka, dobijamo $B_2 = \mu_0 \dfrac{I_2}{2R}$ sa pravcem i smerom kao na slici. Intenzitet struje I_2 dobija se izjednačavanjem intenziteta indukcija $B_1 = B_2$:

$$B_1 = B_2 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{2}\,\frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi a} = \mu_0 \frac{I_2}{2R} \;\Rightarrow\; \frac{2\sqrt{2}\cdot I_1}{\pi\sqrt{2}\cdot R} = \frac{I_2}{2R}$$, pa je konačno $I_2 = \dfrac{4I_1}{\pi} = 8\,[\mathrm{A}]$.

Zadatak 3: Odrediti magnetsku indukciju ***B*** u tački *C*, u vakuumu, za strujne konture prikazane na slikama. U svim slučajevima je $R = 10[\mathrm{cm}]$ i $I = 5[\mathrm{A}]$. U tački c) odrediti i struju *I** u tako da u tački *C* bude ***B***=0.

Rešenje:

Konture na slikama sastoje se od pravolinijskih i krivolinijskih (lučnih) segmenata. Rezultujuća magnetska indukcija u tački *C* jednaka je vektorskom zbiru pojedinačnih indukcija svakog od segmenata.



a) b) c)

a) $B_1 = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R},\; B_2 \dfrac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot R},\; B_3 = 0,\quad B = B_1 + B_2 = \dfrac{\mu_0 \cdot (\pi+1) \cdot I}{4\pi \cdot R} \approx 207{,}1\; [\mu T]$

b) $B_1 = B_6 = 0,\; B_2 = B_4 = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{8\pi \cdot R},\quad B_5 = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{8 \cdot R},\; B = B_2 + B_3 + B_4 + B_5,$

$$B_3 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot (R/\sqrt{3})} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sqrt{3}}{4\pi \cdot R} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3 \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R}$$

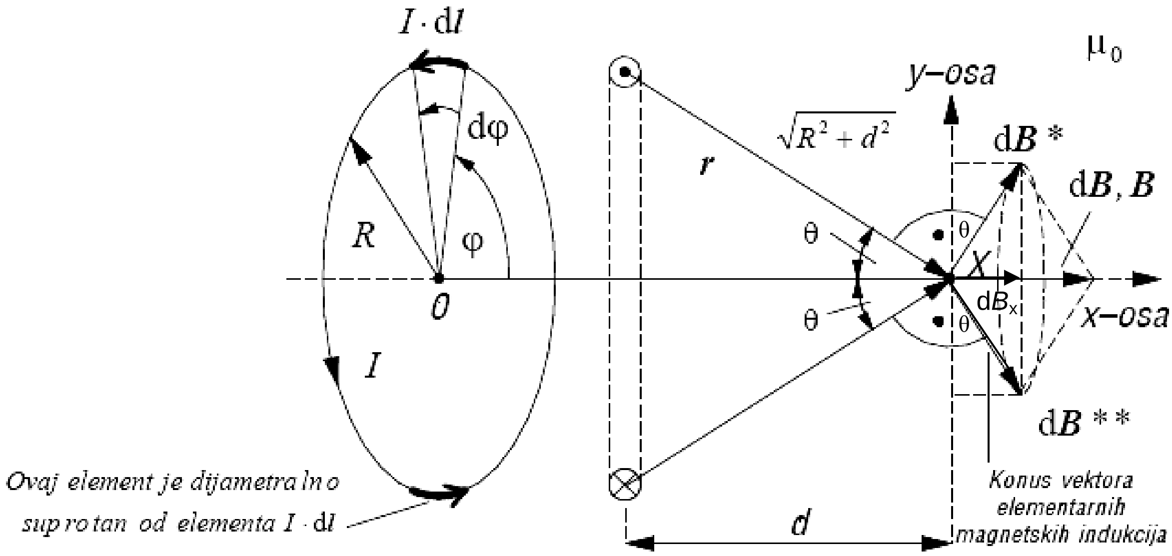
$$B = \frac{\mu_0 \cdot (\pi + 8) \cdot I}{8\pi \cdot R} \approx 27.85\;[\mu\mathrm{T}]$$

c) $B_1 = B_3 = B_5 = 0,\; B_2 = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R},\; B_4 = \dfrac{\mu_0 \cdot I^*}{8 \cdot R},\;\; B = B_2 - B_4 = 0 \;\Rightarrow\; I^* = \dfrac{4}{\pi} \cdot I \approx 6.36\;[\mathrm{A}]$

Zadatak 4: Odrediti magnetsku indukciju ***B*** u tački *X* na osi normalnoj u centru *O* kružne strujne konture.

Rešenje:

Sa slike se uočava da svakom strujnom elementu *I*·d***l*** koji stvara indukciju d***B****** odgovara dijametralno suprotan element koji stvara indukciju d***B******* tako da vektorski zbir d***B******+d***B******* nema *y*, već samo *x*-komponentu vektora d***B***. Odatle se zaključuje da vektor rezultantne magnetske indukcije ***B*** ima pravac *x*-ose. Smer vektora ***B*** određuje se po pravilu desne zavojnice ili pravilu desne šake u odnosu na smer struje u konturi. Iz Bio-Savarovog zakona sledi:



Rešenje:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}^* = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3},\quad \mathrm{d}B^* = \mathrm{d}B^{**} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot\mathrm{d}l\cdot\sin\sphericalangle(\mathrm{d}\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\cdot R\cdot\mathrm{d}\varphi}{R^2+d^2},$$

jer je $\angle(\mathrm{d}\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}) = \dfrac{\pi}{2}$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{R^2+d^2}$, $\mathrm{d}l = |\mathrm{d}\boldsymbol{l}| = R\cdot\mathrm{d}\varphi$.

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \left(2\cdot|\mathrm{d}\mathbf{B}^*|\cdot\sin\theta\right)\cdot\mathbf{i} = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I\cdot R^2\cdot\mathrm{d}\varphi}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}\cdot\mathbf{i};\quad \varphi\in[0,\pi],\ \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}},\ \boldsymbol{i} - ort\ x - ose$$

Nakon integracije po kružnoj konturi dobijamo:

$$\boldsymbol{B} = \left(\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\cdot\mathbf{i} = \frac{\mu_0\cdot I}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}\cdot\mathbf{i} = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R}\cdot\sin^3\theta\cdot\mathbf{i}.$$

Za d=0 dobijamo magnetnu indukciju u centru kružne konture sa strujom I, $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R}\cdot\boldsymbol{i}.$

Dejstvo magnetskog polja na strujnu konturu

Ako je indukcija magnetskog polja ***B*** na mestu strujnog elementa I·d***l***, tada na taj element deluje mehanička (tj. magnetska) sila d***F***=I·d***l*** × ***B*** (sl. 4a), čiji se pravac i smer određuju po pravilu desne zavojnice. Rezultantna sila kojom *nehomogeno* magnetsko polje deluje na neki strujni provodnik P, kao i sila kojom ono deluje na konturu C, dati su sledećim relacijama:

$$\boldsymbol{F} = \int_P I\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\quad\wedge\quad \boldsymbol{F} = \oint_C I\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B},$$

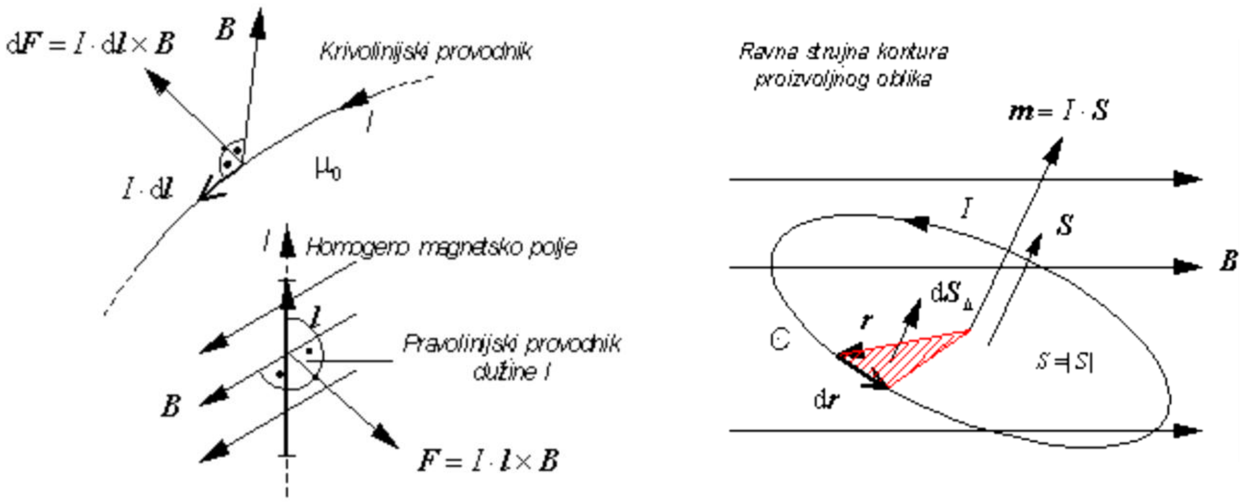
gde je ***B*** magnetska indukcija *na mestu strujnog elementa I*·d***l***. U slučaju kada je magnetsko polje *homogeno*, iz prethodne relacije se za krivolinijske i pravolinijske provodnike dobija:

$$\boldsymbol{F} = I\cdot\left(\int_P\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\times\boldsymbol{B}\ \leftarrow\ \begin{matrix}Krivolinijski\\ provodnik\end{matrix};\quad \boldsymbol{F} = I\cdot\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\ \leftarrow\ \begin{matrix}\mathrm{Pr}\,avolinijski\\ provodnik\end{matrix},$$

gde je ***l*** vektor dužine pravolinijskog provodnika orijentisan u smeru struje I tog provodnika.

Međutim, za rezultantnu mehaničku silu koja deluje na *proizvoljnu strujnu konturu C* u *homogenom* magnetskom polju dobija se:

$$\boldsymbol{F} = I \cdot \left(\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} \right) \times \boldsymbol{B} = 0, \; jer \;\; je \;\; \forall C: \;\; \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,.$$



a) **Sl. 4** b)

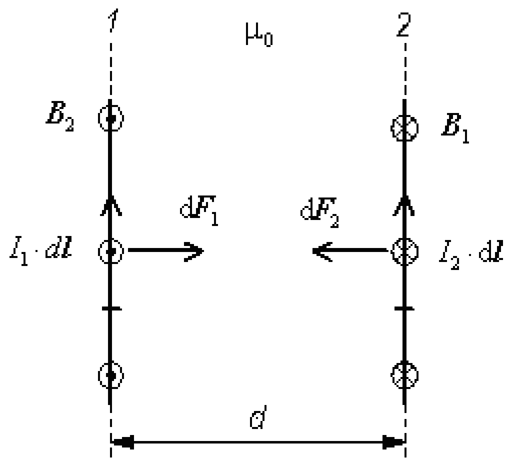
Dakle, na strujnu konturu u homogenom magnetskom polju ne deluje nikakva mehanička sila. Na krutu (tj. nedeformabilnu) strujnu konturu *C* u homogenom magnetskom polju deluje rezultantni moment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ koji teži da tu konturu postavi u položaj stabilne ravnoteže (Sl. 4.b) u kome su vektori $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{B}$ istog pravca i smera (poklapaju se). Vektor $\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I \cdot \boldsymbol{S}$ naziva se magnetni moment strujne konture *C*, gde je *S* ravna površina oslonjena na konturu *C*.

Zadatak 5: Odrediti podužnu silu koja deluje na svaki od dva tanka, neograničena, paralelna, pravolinijska provodnika 1 i 2 u vakuumu, postavljena na međusobnom rastojanju *d*, sa strujama I_1 i I_2, respektivno.

Rešenje:

Odredimo podužnu silu kojom prvi provodnik deluje na drugi. U prostoru oko prvog provodnika postoji magnetno polje indukcije $\boldsymbol{B}_1$. Intenzitet ovoga polja je $B_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$, gde je *r* normalno rastojanje od prvog provodnika. Pravac i smer vektora $\boldsymbol{B}_1$ i smer struje I_1 vezani su pravilom desne zavojnice. Magnetna indukcija prvog provodnika na mestu drugog provodnika je $B_1(r = d) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{d}$, sa pravcem i smerom kao na slici.

Na strujne elemente drugog provodnika deluje onda elementarna elektromagnetna sila $d\boldsymbol{F}_2 = I_2 (d\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}_1)$, čiji je intenzitet $dF_2 = I_2 \cdot dl_2 \cdot B_1$, a pravac i smer kao na slici.



Podužna elektromagnetna sila na drugi provodnik je onda: $F_2' = \frac{dF_2}{dl_2} = I_2 \cdot B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{d}$.

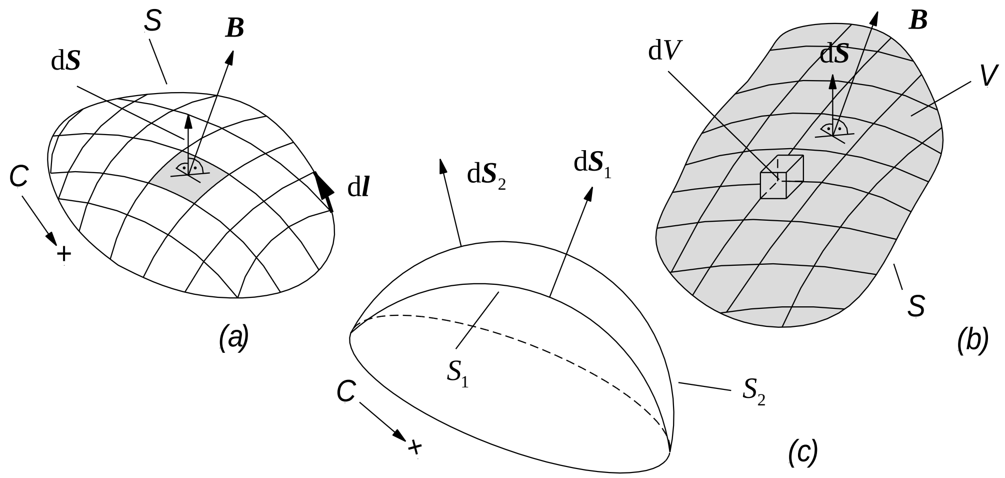
Sila je privlačna i teži da smanji rastojanje između provodnika. Prema zakonu akcije i reakcije, na prvi provodnik deluje podužna sila $\boldsymbol{F}'_1 = -\boldsymbol{F}'_2$.

Algebarski intenziteti podužnih sila koje deluju na posmatrane provodnike međusobno su jednaki, a sile su privlačne kada struje provodnika imaju isti, a odbojne kada struje provodnika imaju suprotne smerove.

Magnetski fluks i zakon o njegovoj konzervaciji

Fluks vektora magnetske indukcije *B* (ili magnetski fluks) kroz površ *S* orijentisanu u smeru vezanom po pravilu desne zavojnice sa *usvojenom orijentacijom* konture *C* na koju se ta površ oslanja (sl. 5a) je

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \ .$$



Sl. 5

Kontura *C* može biti, ili neka tanka *strujna* kontura, ili zamišljena (*matematička*) kontura. Promenom orijentacije konture menja se i orijentacija oslonjene površi, pa time i znak magnetskog fluksa. Prema tome, magnetski fluks je skalarna, algebarska, fizička veličina, a magnetska indukcija je u stvari površinska gustina fluksa, s obzirom na to da je $B=|\boldsymbol{B}|$ (=) ϕ/S (*S*-površina). Jedinica za magnetski fluks je *Veber* [Wb].

Pošto su linije magnetske indukcije neprekidne, tj. nemaju ni početka ni kraja – jer se magnetske mase, odnosno magnetski polovi, ne mogu izdvojiti – to je polje vektora ***B*** bezizvorno, što znači da je u svakoj tački magnetskog polja div ***B***=0. Odatle, za proizvoljnu zatvorenu i orijentisanu površ *S* (sl. 5b) u magnetskom polju – na osnovu teoreme Gaus-Ostrogradskog – sledi **zakon o održanju, ili konzervaciji magnetskog fluksa**:

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \mathrm{div}\, \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}V = 0 \, .$$

Na osnovu zakona o konzervaciji magnetskog fluksa može se uvesti pojam magnetskog *fluksa kroz konturu C* (sl. 5c). Neka su Φ_1 i Φ_2 fluksevi kroz proizvoljne površi S_1 i S_2, obe oslonjene na istu orijentisanu konturu *C*. Orijentacija tih površi vezana je po pravilu desne zavojnice sa orijentacijom konture *C*. Magnetski fluks Φ kroz *zatvorenu površ* $S_1 \cup S_2$ – orijentisanu prema spoljašnjosti, može se prema zakonu o konzervaciji magnetskog fluksa predstaviti na sledeći način:

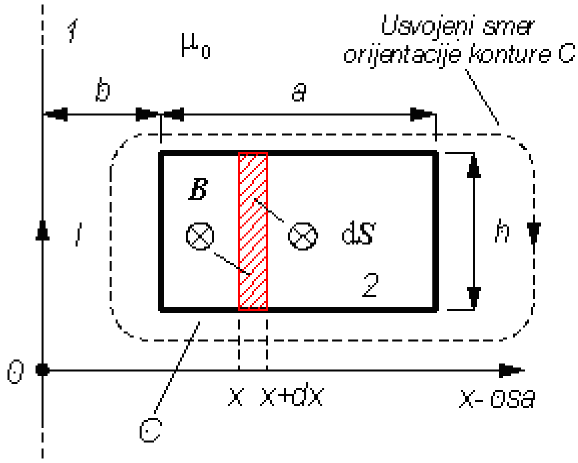
$$\left\{ \Phi_1 := \int_{S_1} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \wedge \quad \Phi_2 := \int_{S_2} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right\}; \quad \Phi = \oint_{S_1 \cup S_2} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 = \Phi_2 \, ,$$

što znači da je magnetski fluks isti kroz svaku površ oslonjenu na datu konturu *C*.

Zadatak 6: Odrediti fluks magnetskog polja kroz pravougaonu konturu *C* koje stvara vremenski konstantna struja *I* u tankom, neograničenom pravolinijskom provodniku u vakuumu (ili u vazduhu). Kontura može biti ili tanka žičana, ili zamišljena, matematička kontura.

Rešenje:

Kontura se nalazi u magnetnom polju struje pravolinijskog provodnika. Intenzitet magnetske indukcije $\boldsymbol{B}$ u tačkama na rastojanju x od „strujne prave" sa strujom *I* iznosi $B(x) = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi x}$, sa pravcem i smerom kao na slici.



S obzirom da vektor magnetske indukcije nije homogen po površini *S* oslonjenoj na konturu *C*, izdelićemo površinu *S* na elementarne pravougaone površine d*S* na kojima je vektor $\boldsymbol{B}$ homogen. Vektor normale na površinu *S* vezan je pravilom desne zavojnice sa orijentacijom konture *C*.

Elementarni magnetni fluks dΦ vektora $\boldsymbol{B}$ kroz površinu *dS=hdx* je onda:

$$d\Phi = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = Bhdx \cos\angle(\boldsymbol{B},\boldsymbol{n}) = Bhdx = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} hdx .$$

Ukupan fluks kroz konturu *C* dobija se integracijom elementarnog fluksa dΦ po celoj površini *S* :

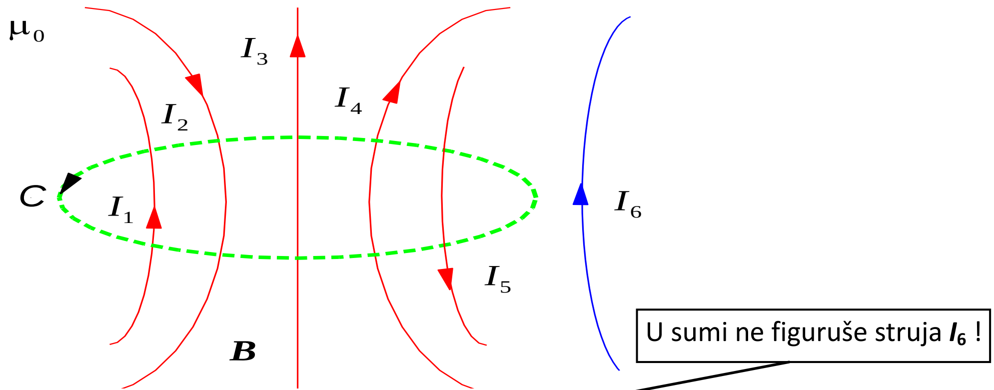
$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_b^{b+a} \mu_0 \frac{Ih}{2\pi}\frac{dx}{x} = \mu_0 \frac{Ih}{2\pi} \ln\frac{a+b}{b} .$$

Amperov zakon o cirkulaciji vektora magnetske indukcije u vakuumu:

Za složeni sistem vremenski konstantnih struja u vakuumu, kanalisanih linijskim provodnicima, odnosno odgovarajućim strujnim konturama (sl. 6a) i proizvoljno usvojenu, orijentisanu konturu C važi:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \cdot \sum_{(k)} \pm I_k \quad \leftarrow \quad \textit{Suma je po svim strujama koje se zahvataju sa konturom } C .$$

pri čemu ispred I$_k$ stoji predznak "+" u slučaju kada su orijentacija konture C i smer te struje vezani po pravilu desne zavojnice, dok u suprotnom slučaju stoji predznak "-".



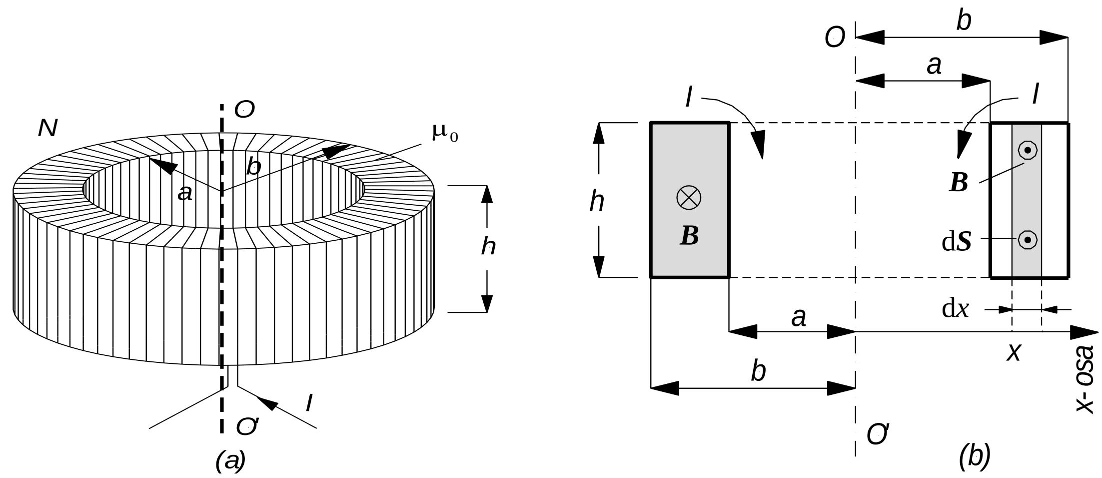
$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5)$$

Sl. 6

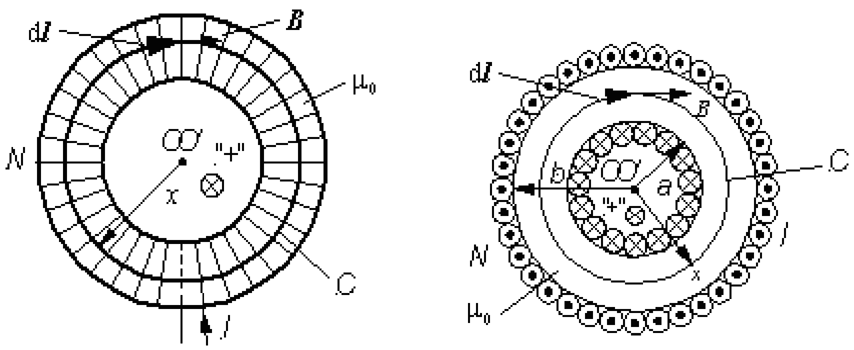
Činjenica da je cirkulacija vektora ***B*** u opštem slučaju različita od nule, magnetska polja svrstava u grupu **vrtložnih**, odnosno **solenoidskih** polja. Amperov zakon se može primenjivati, ne samo u vakuumu, već i u većini materijalnih sredina, ali tek pošto što se supstancija na ekvivalentan način predstavi sistemom Amperovih mikrostruja u vakuumu. U takve sredine spada većina dija- i paramagnetika. Međutim, kod feromagnetika nije moguće primeniti Amperov zakon, već generalisani Amperov zakon, o čemu će biti više reči već u idućem predavanju.

Magnetska indukcija torusnog namotaja

Pod torusnim namotajem podrazumeva se namotaj, obično ravnomerno i gusto namotan na jezgro, najčešće u obliku naduvane automobilske gume. Presek jezgra najčešće je krug, ali može biti i pravougaonik (kao na Sl. 8.a) ili kvadrat. Ako su dimenzije poprečnog preseka torusa znatno manje od njegovog srednjeg poluprečnika, za taj torus kaže se da je tanak. Kako su navojci torusa gusto zbijeni, struja torusa obrazuje strujni plašt oko njega, pa su linije magnetske indukcije u torusu koncentrične kružnice sa centrima na osi *OO*'.



Sl. 8



Sl. 9

Orijentacija vektora magnetske indukcije može se odrediti po pravilu desne šake: kada se prstima desne ruke obuhvate navojci torusa u referentnom smeru struje *I*, tada palac pokazuje orijentaciju linija magnetske indukcije ***B***.

Da bi se Amperov zakon primenio na kružnicu *C*, nju je potrebno prvo orijentisati u proizvoljno usvojenom smeru. Na Sl. 9 usvojena je ista orijentacija konture *C* kao i linija magnetske indukcije ***B*** (tj. u smeru kretanja kazaljke na satu). Kada se prstima desne ruke kružnica *C* obuhvati u smeru orijentacije, tada palac desne ruke pokazuje referentni ili obračunski smer za sabiranje struja koje se prema Amperovom zakonu zahvataju sa konturom *C*. Smer sabiranja struja označen je na slici simbolom ⊗ i znakom "+" pored njega. Kada se primeni Amperov zakon na kružnicu *C* poluprečnika $x \in (0, \infty)$ dobija se:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C B \cdot \mathrm{d}l = B \cdot \oint_C \mathrm{d}l = B \cdot 2\pi \cdot x = \begin{pmatrix} \mu_0 \cdot N \cdot I, \ x \in [a, b] \\ 0, \ x \in \{(0, a) \cup (b, \infty)\} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot x}, \ x \in [a, b] \ \wedge \ B = 0, \ x \in \{[0, a) \cup (b, \infty)\}$$

gde je $2\pi \cdot x$ dužina uočene linije magnetskog polja, odnosno kružnice *C*. Magnetsko polje ne postoji izvan torusa. Intenzitet magnetske indukcije ne zavisi od oblika poprečnog preseka torusa.

Ako je torus *tanak*, može se smatrati da je magnetsko polje po njegovom poprečnom preseku homogeno sa intenzitetom

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 N' I$$

gde je $l=(a+b)\cdot \pi$ dužina srednje linije, a N' podužna gustina navojaka na torusu (tj. broj navojaka po jedinici dužine).

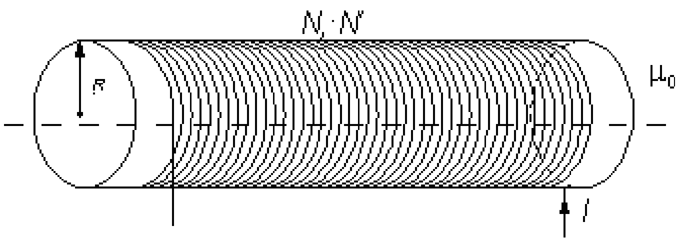
Kada je poznata raspodela magnetske indukcije po poprečnom preseku torusa, fluks ϕ_0 u torusu određuje se postupkom opisanim u zadatku 6. Tačan izraz za magnetski fluks ϕ_0 kroz *poprečni presek* torusa dat je sledećom relacijom (prema oznakama na sl. 8b):

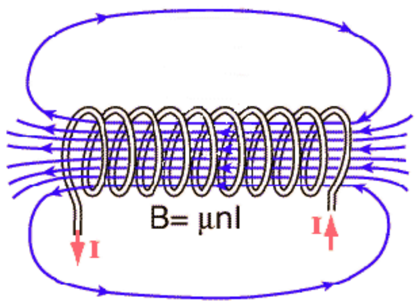
$$\Phi_0 = \int_a^b \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot x} \cdot h \cdot \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot h}{2\pi} \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot h}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

dok je približan izraz za fluks tankog torusa Φ_0':

$$\Phi_0' = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot \frac{a+b}{2}} \cdot h \cdot (b-a) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot h}{\pi} \cdot \frac{b-a}{b+a} = \mu_0 N' I \cdot h(b-a).$$

Solenoid





Kada srednji poluprečnik tankog torusa neograničeno raste, tada torus prelazi u neograničen, tanak solenoid, pa je prema prethodnom, magnetska indukcija u solenoidu

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 N' I = \mu_0 n I,$$

gde je $N' = n = N / l$ podužna gustina namotaja na solenoidu (tj. broj navojaka po jedinici dužine). Pravac i smer vektora magnetske indukcije ***B*** i smer struje kroz namotaje na solenoidu vezani su po pravilu desne zavojnice (ili desne šake), kao na slici.