2. OSNOVNE JEDNACINE KRETANJA

2.1. OSNOVNE JEDNACINE KRETANJA “SFERIČNA ZEMLJA”

2.1.1. Translacija – Newton-ova jednačina

Osnove jednačine kretanja su date na osnovu Njutnovog zakona, za inercijalni koordinatni sistem, a za model sferne rotirajuće zemlje.

Diferencijalne jednačine su definisane u Inercijalnom koordinatnom sistemu **[X,Z,Y]** (translacione jednačine) i Vezanom sistemu **[x,y,z]** (rotacione jednačine).

U bilo kom inercijalnom koordinatnom sistemu, Drugi Newton-ov zakon (Zakon inercije) glasi:

$$m\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \sum \vec{F} \qquad \textbf{(2-1)}$$

ili, ako se vektor polozaja **r** razloži na projekcije u inercijalnom koordinatnom sistemu vezanom za zemlju **[X,Z,Y]**, a imajući u vidu da su spoljne sile koje deluju na projektil *aerodinamička (*F_A*), pogonska (*F_T*), upravljajuća (*F_C*),* i *gravitaciona (*F_g*),* sila:

$$\begin{aligned}
m\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \sum F_X = F_{A_X} + F_{T_X} + F_{C_X} + F_{g_X} \\
m\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \sum F_Y = F_{A_Y} + F_{T_Y} + F_{C_Y} + F_{g_Y} \\
m\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \sum F_Z = F_{A_Z} + F_{T_Z} + F_{C_Z} + F_{g_Z}
\end{aligned} \qquad \textbf{(2-2)}$$

Svaku od ove tri diferencijalne jednačine drugog reda možemo da rasčlanimo na po dve diferencijalne jednačine prvog reda, a imajući u vidu da je:

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= V_X \\
\frac{dY}{dt} &= V_Y \\
\frac{dZ}{dt} &= V_Z
\end{aligned} \qquad \textbf{(2-3)}$$

možemo da napišemo sledećih šest diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_X &= \Sigma F_X / m = (F_{A_X} + F_{T_X} + F_{C_X} + F_{g_X}) / m \\
V_Y &= \Sigma F_y / m = (F_{A_Y} + F_{T_Y} + F_{C_Y} + F_{g_Y}) / m \\
\dot{V}_Z &= \Sigma F_Z / m = (F_{A_Z} + F_{T_Z} + F_{C_Z} + F_{g_Z}) / m
\end{aligned}
\tag{2-4}
$$

(jednačine brzine ili dinamičke jednačine), i

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= V_X \\
\dot{Y} &= V_Y \\
\dot{Z} &= V_Z
\end{aligned}
\tag{2-5}
$$

(jednačine položaja ili kinematske jednačine).

2.1.2. Rotacija – Euler-ova jednačina

Jednačine održanja momenta količine kretanja – (Euler-ov zakon) u vezanom koordinatnom sistemu glasi:

$$
\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\omega} \times J = \sum \vec{M}
\tag{2-6}
$$

gde je J tenzor inercije:

$$
J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}
\tag{2-7}
$$

Uobičajeno je da je koordinatni sistem postavljen tako da su $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ glavne ose inercije. Dijagonalni članovi $\boldsymbol{J_{xx}}$, $\boldsymbol{J_{yy}}$, $\boldsymbol{J_{zz}}$, predstavljaju glavne momente inercije, i definisani su zapreminskim integralima:

$$
\begin{aligned}
J_{xx} &= \int_v \rho\left(y^2 + z^2\right) dv \\
J_{yy} &= \int_v \rho\left(x^2 + z^2\right) dv \\
J_{zz} &= \int_v \rho\left(x^2 + y^2\right) dv
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

Ostali članovi predstavljaju centrifugalne momente inercije definisane sledećim zapreminskim integralima:

$$J_{xy} = \int_v \rho xydv$$
$$J_{xz} = \int_v \rho xzdv \qquad \textbf{(2-9)}$$
$$J_{yz} = \int_v \rho yzdv$$

Ako razložimo vektor ugaone brzine ω na njegove komponente duž glavnih koordinatnih osa vezanog koordinatnog sistema **[x,y,z]**:

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2-10)}$$

iz jednačine (2-6) se dobija:

$$\begin{aligned} &J_{xx}\dot{p} + J_{xy}\dot{q} + J_{xz}\dot{r} + rq(J_{yy} - J_{zz}) - J_{xy}rp + J_{xz}pq + J_{yz}\left(q^2 - r^2\right) = \Sigma M_x \\ &J_{xy}\dot{p} + J_{yy}\dot{q} + J_{yz}\dot{r} + rp(J_{zz} - J_{xx}) - J_{yz}pq + J_{xy}rq + J_{xz}\left(r^2 - p^2\right) = \Sigma M_y \\ &J_{xz}\dot{p} + J_{xy}\dot{q} + J_{zz}\dot{r} + pq(J_{xx} - J_{yy}) - J_{xz}rq + J_{yz}pr + J_{xy}\left(p^2 - q^2\right) = \Sigma M_z \end{aligned} \qquad \textbf{(2-11)}$$

(Euler-ove dinamičke jednačine za opšti slučaj)

Ovo je generalni oblik Euler'ove jednačine, za telo bilo kakvog oblika. Ona ima malu primenu, osim za proučavanje utija debalansa na kretanje projektila. Sve letelice (projektili i avioni) su u najmanju ruku simetrične u odnosu na vertikalnu ravan (***x,z***). Za takve oblike tela odgovarajući centrifugalni momenti inercije će biti jednaki nuli:

$$J_{xy} = J_{yz} = 0 \qquad \textbf{(2-12)}$$

pa će tenzor inercije preći u degenerisani oblik:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2-13)}$$

Čime će se jednačina (2-11) pojednostaviti u oblik:

$$\begin{aligned} &J_{xx}\dot{p} + J_{xz}\dot{r} + rq(J_{yy} - J_{zz}) + J_{xz}pq = \Sigma M_x \\ &J_{yy}\dot{q} + rp(J_{zz} - J_{xx}) + J_{yz}\left(r^2 - p^2\right) = \Sigma M_y \\ &J_{xz}\dot{p} + J_{zz}\dot{r} + pq(J_{xx} - J_{yy}) - J_{xz}rq = \Sigma M_z \end{aligned} \qquad \textbf{(2-14)}$$

(Euler-ove dinamičke jednačine za letelicu simetričnu u odnosu na vertikalnu ravan)

Ako je telo simetrično i u odnosu na horizontalnu ravan (***x,y***), što uključujue krstastu i onsosimetričnu konfiguraciju, svi centrifuglani momenti inercije bice jednaki nuli:

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yx} = J_{yz} = J_{zx} = J_{zy} = 0 \tag{2-15}$$

pa će tenzor inercije *J* preći u vektor inercije J:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} J_{xx} \\ J_{yy} \\ J_{zz} \end{vmatrix} \tag{2-16}$$

Na taj način, dobija se Euler-ova jednačina u obliku:

$$\vec{\omega} \times \vec{J} = \sum \vec{M} \tag{2-17}$$

odnosno, ako razložimo vektor ugaone brzine ω na njegove komponente duž glavnih koordinatnih osa vezanog koordinatnog sistema **[x,y,z]**:

$$\begin{aligned} J_{xx}\dot{p} + rq(J_{yy} - J_{zz}) &= \Sigma M_x \\ J_{yy}\dot{q} + rp(J_{zz} - J_{xx}) &= \Sigma M_y \\ J_{zz}\dot{r} + pq(J_{xx} - J_{yy}) &= \Sigma M_z \end{aligned} \tag{2-18}$$

ili, kad se projekcije momenata razlože na komponente (Moment ima samo tri komponente, jer gravitaciona sila deluje u centru masa projektila koji je koincidentan sa koordinatnim početkom Vezanog koordinatnog sistema pa tako ne izaziva nikakav moment):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= [\boldsymbol{\Sigma M}_x + \boldsymbol{rq}(\boldsymbol{J}_{zz} - \boldsymbol{J}_{yy})] / \boldsymbol{J}_{xx} = [\boldsymbol{M}_{Ax} + \boldsymbol{M}_{Tx} + \boldsymbol{M}_{Cx} + \boldsymbol{rq}(\boldsymbol{J}_{zz} - \boldsymbol{J}_{yy})] / \boldsymbol{J}_{xx} \\ \dot{\boldsymbol{q}} &= [\boldsymbol{\Sigma M}_y + \boldsymbol{rp}(\boldsymbol{J}_{xx} + \boldsymbol{J}_{zz})] / \boldsymbol{J}_{yy} = [\boldsymbol{M}_{Ay} + \boldsymbol{M}_{Ty} + \boldsymbol{M}_{Cy} + \boldsymbol{rp}(\boldsymbol{J}_{xx} - \boldsymbol{J}_{zz})] / \boldsymbol{J}_{yy} \\ \dot{\boldsymbol{r}} &= [\boldsymbol{\Sigma M}_z + \boldsymbol{pq}(\boldsymbol{J}_{yy} - \boldsymbol{J}_{xx})] / \boldsymbol{J}_{zz} = [\boldsymbol{M}_{Az} + \boldsymbol{M}_{Tz} + \boldsymbol{M}_{Cz} + \boldsymbol{pq}(\boldsymbol{J}_{yy} - \boldsymbol{J}_{xx})] / \boldsymbol{J}_{zz} \end{aligned} \tag{2-19}$$

(Euler-ove dinamičke jednačine za krstasti ili osnosimetrični projektil)

Da bi se dobile promene Euler-ovih uglova, neophodno je projektovati vektor ugaone brzine na Inercijalni koordinatni sistem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi/\cos\Theta & \cos\Phi/\cos\Theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} p + (q\sin\Phi + r\cos\Phi)tg\Theta \\ -r\sin\Phi + q\cos\Phi \\ \dfrac{q\sin\Phi + r\cos\Phi}{\cos\Theta} \end{bmatrix} \tag{2-20}$$

(kinematska jednačina Euler-ovih uglova)

Upravo u prvoj i poslednjoj od ove tri jednačine vidi se jedna od najvećih mana predstavljanja ugaonog položaja projektila preko Euler-ovih uglova. Kada je vrednost ugla Θ bliska vrednosti $\pi/2$ dobijaju se jako velike vrednosti izvoda ojlerovih uglova, sto može da izazove numeričku nestabilnost pri numeričkom rešavanju ovih jednačina. Upravo zbog toga (pre svega) se u modernoj dinamici leta daje prednost interpretaciji u obliku kvaterniona.

U slučaju da se ugaoni položaj predstavlja u obliku kvaterniona, umesto predhodne tri diferencijalne jednačine će se pojaviti četiri diferencijalne jednačine promene vrednosti kvaterniona:

$$\begin{vmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-e_1 p - e_2 q - e_3 r)/2 \\ (e_0 p - e_3 q + e_2 r)/2 \\ (+e_3 p + e_0 q - e_1 r)/2 \\ (-e_2 p = e_1 q + e_0 r)/2 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2-21)}$$

(kinematska jednačina kvaterniona)

Dakle, korišćenjem kinematskih jednačina preko kvaterniona, dobija se jedna diferencijalna jednačina više nego u slučaju da se radi direktno preko euler-ovih uglova. Medjutim, to je cena koju vredi platiti da se izbegne numerička nestabilnost u okolini vrednosti $|\Theta|=\pi/2$. sistem diferencijalnih jednačina je u ovom slučaju očigledno predimenzionisan jer, implicitno, sadrži uslov:

$$\varepsilon = 1 - \left(e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right) = 0 \qquad \textbf{(2-22)}$$

Ovaj uslov se može koristiti kao kriterijum tačnosti proračuna, ili čak kao metod povećanja tačnosti putem ortogonalizacije kvaterniona (poglavlje 4).

Ovim je sistem diferencijalnih jednačina zatvoren u slučaju nevođenih projektila. U slučaju vodjenih projektila, biče nam potrebne dodatne jednačine. Ove jednačine pretstavljaju dinamičke jednačine sistema u vodjenja i pravljanja projektila, i one nam omogućavaju da odredimo pozicione uglove kontrolnih elemenata projektila..

Integracijom prvih šest diferencijalnih jednačina (obično se one rešavaju numeričkim metodom), za zadate početne uslove, dobija se trajektorija projektila kao i promena vektora brzine kretanja centra masa. Preostale jednačine integracijom daju položaj projektila kao krutog tela u prostoru kao i njegove ugaone brzine.

Neophodno je napomenuti da se na ovaj način trajektirija projektila I vector brzine dobijaju u odnosu na inercijalni koordinatni system, ugaoni položaj projektila takodje, dok se ugaona brzina projektila dobija u koordinatnom sistemu vezanom za projektil.

2.2. OSNOVNE JEDNACINE KRETANJA "RAVNA ZEMLJA"

Ukoliko je domet projektila dovoljno mali, zanemarljiv u odnosu na dimenzije radijusa Zemlje (u praksi se smatra da ovakva aproksimacija daje dobre rezultate za domete do 250 km), krivina Zemlje se može zanemariti i površina Zemlje se može smatrati ravnom. Koriolisovo ubrzanje usled rotacije koordinatnog sistema vezanog za zemlju (neinercioni sistem) se zanemaruje kao i horizontalna komponenta centrifugalnog ubrzanja usled rotacije zemlje, dok se vertikalna komponenta centrifuganog ubrzanja računa preko "efektivnog" gravitacionog ubrzanja:

$$g' = g - R \cos^2 \delta \Omega_E^2 \qquad \textbf{(2-23)}$$

Diferencijalne jednačine kretanja projektila se pišu u Normalnom koordinatnom sistemu vezanom za zemlju **[x_o,y_o,z_o]** koji se smatra *približno* inercijalnim. Pri tome diferencijalne jednačine translacionog kretanja postaju:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{xo} &= \Sigma F_{xo} / m = (F_{A_X} + F_{T_X} + F_{C_X} + F_{g_X}) / m \\
V_{y_o} &= \Sigma F_{y_o} / m = (F_{A_Y} + F_{T_Y} + F_{C_Y} + F_{g_Y}) / m \\
\dot{V}_{zo} &= \Sigma F_{zo} / m = (F_{A_Z} + F_{T_Z} + F_{C_Z} + F_{g_Z}) / m
\end{aligned} \qquad \textbf{(2-24)}
$$

(Newton-ove dinamičke jednačine), i

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_o &= V_{xo} \\
\dot{y}_o &= V_{y_o} \\
\dot{z}_o &= V_{zo}
\end{aligned} \qquad \textbf{(2-25)}
$$

(kinematske jednačine).

Jednačine rotacije ostaju iste kao i ranije, s tim što se Euler-ovi uglovi, odnosno kvaternioni, računaju u odnosu na Normalni koordinatni sistem vezan za zamlju a ne inercijalni koordinatni sistem. Time azimut, elevacioni ugao I ugao valjanja postaju Euler-ovi uglovi:

$$
\begin{aligned}
\Phi &\equiv \gamma \\
\Theta &\equiv EL \\
\Psi &\equiv AZ
\end{aligned} \qquad \textbf{(2-26)}
$$

2.3. Početne vrenosti parametara leta

Položaj projektila je obično zadat geogrfskom du-inom α_G, geografskom đirinom δ_G i nadmorskom visinom H. Iz oveih veličina se lako dobija početna vrednost vektora položaja u inercijalnom koordinatnom sistemu:

$$
X_{I_0} = \begin{bmatrix} (R_E + H)\cos(\delta_G)\cos(\alpha_G) \\ (R_E + H)\cos(\delta_G)\sin(\alpha_G) \\ (R_E + H)\sin(\delta_G) \end{bmatrix} \qquad \text{(2-27)}
$$

Početna brzina projektila (pre starta) biće, u slučaju raketnog projektila, jednaka perifernoj brzini rotacije Zemlje, dok će u slušaju klasičnog projektila, ovoj vrednosti biti dodata vrednost relativne početne brzine projektila:

$$
\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{I_0}} = \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{\Omega_I}} + \vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} \qquad \textbf{(2-28)}
$$

Početni ugaoni položaj projektila je standfardno zadat uglovima azimuta (AZ), elevacije (EL) i valjanja (γ), u normalnim vezanom za Zemlju koordinatnom sistemu. Iz ovih uglova lako se dobija početna vrednost matrice transformacije T_0^m jednačinom

(1-56), a zatim i početna vrednost matrice transformacije T_I^m jednačinom (1-57) i početne vrednosti kvaterniona jednačinom (1-58)-(1-61)

Početna relativna ugaona brzina valjanja, kod lagano-rotirajućih i brzo-rotirajućih (klasičnih) projektila Ω_0 je obično zadata, dok se početna vrednost vektora apsolutne ugaone brzine projektila dobija transformacijom ove ugaone brzine u inercijalni sistem i dodavanjem ugaone Zemlje:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_0 = T_0^I \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_E \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2-29)}$$

Time su određeni početni uslovi diferencijalnih jednačina kretanja.