

Supstancija u magnetskom polju

Sve supstancije su podložne magnećenju i svojim prisustvom u različitoj meri doprinose promeni magnetskog polja u kojem se nalaze. Namagnećenost supstancije potiče od *elementarnih magnetskih momenata* elektrona i jezgara atoma. Kretanje elektrona u atomima je složeno i može se razložiti na *orbitalno* kretanje i rotaciju oko sopstvene ose (*spin elektrona*). Spin elektrona je njegova primarna karakteristika i igra prvorazrednu ulogu u objašnjenju ponašanja elektrona u atomima, molekulima i kristalima. Posebno važnu ulogu spin elektrona ima u proučavanju feromagnetskih pojava.

Atomi i molekuli predstavljaju izuzetno složene sisteme mikroelektričnih strujnih kontura u vakuumu, koji se mogu okarakterisati odgovarajućim rezultatnim magnetskim momentima. Na te momente utiču orbitalni magnetski momenti elektrona u atomima i magnetski momenti spina atomskih jezgara i elektrona.

Sve supstancije mogu se podeliti na dijamagnetike, paramagnetike i feromagnetike. Kod dijamagnetika i paramagnetika namagnećenost iščezava uklanjanjem stranog magnetskog polja, dok se kod feromagnetika ona zadržava. Feromagnetici, ne samo da svojim prisustvom značajno menjaju magnetsko polje u kojem su nalaze, već mogu da ga i samostalno stvaraju (permanentni magneti).

U dijamagnetike spadaju: bakar, srebro, cink, bizmut, olovo, sumpor, grafit, tečni azot, voda... Kovanica "dijamagnetski" potiče od načina ponašanja dijamagnetskih štapova u magnetskom polju: oni teže da se postave *popreko* na linije magnetske indukcije. Dijamagnetski efekat je pojava indukovanih struja i magnetskih momenata u atomima, koji teže da anuliraju magnetski fluks stranog polja i da to polje oslabe.

U paramagnetike spadaju aluminijum (Al), platina (Pt), kiseonik, vazduh... Kovanica "paramagnetski" potiče od načina ponašanja paramagnetskih štapova u magnetskom polju: na njih deluje mehanički moment koji teži da ih postavi *paralelno* sa linijama magnetske indukcije. Usled toga se intenzitet magnetske indukcije kod paramagnetika u stranom magnetskom polju neznatno povećava, a taj efekat postaje sve manje izražen sa porastom temperature.

U feromagnetike spadaju gvožđe, kobalt, nikal, neke retke zemlje i veći broj legura i jedinjenja u kojima nema nijednog od navedenih elemenata. U feromagneticima unetim u strano magnetsko polje dolazi do pojave magnetske indukcije velikog intenziteta, mada porast temperature taj efekat veoma mnogo narušava.

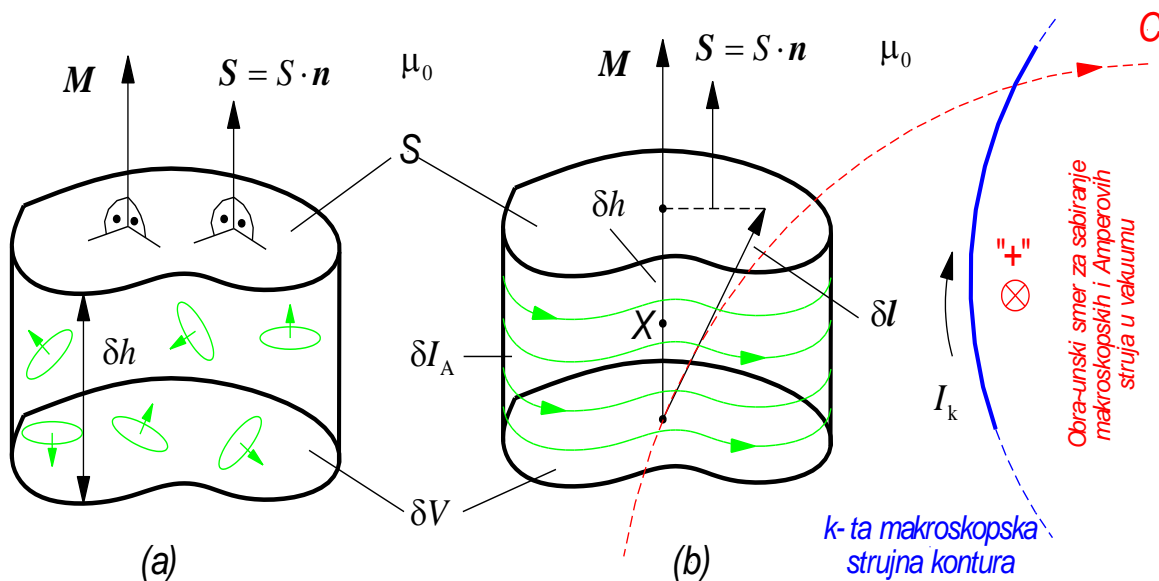
U pogledu magnetskih efekata i uticaja na magnetsko polje, svaki atom ili grupa atoma može se zameniti ekvivalentnom strujnom konturom u vakuumu, sa magnetskim momentom koji odgovara ukupnom magnetskom momentu atoma ili grupe atoma. U supstanciji koja prethodno *nije bila namagnetisana* i nalazi se *izvan stranog magnetskog polja*, magnetsko polje Amperovih mikrostruja se ne može zapaziti, jer su svi *elementarni magnetski momenti* orijentisani u svim pravcima podjednako, te zato i ne postoji rezultatno magnetsko polje. Međutim, kada se supstancija unese u strano magnetsko polje, tada sve elementarne strujne konture teže da se postave tako da njihovi magnetski momenti budu kolinearni sa stranim poljem. Toj tendenciji suprotstavljaju se termički uticaji, usled čega dolazi samo do delimične orijentacije mikrokontura i vektora magnetskih momenata, što za posledicu ima pojavu sopstvenog magnetskog polja. Kod dijamagnetika i paramagnetika namagnećenost iščezava ukidanjem stranog magnetskog polja, a kod feromagnetika ona se zadržava. Samo kod njih se u odsustvu stranog magnetskog polja ne

poništavaju elementarni magnetski momenti atoma i molekula, pa je kod feromagnetika uočljivo prisustvo sopstvenog magnetskog polja.

Kao što se elementarna strujna kontura u potpunosti može opisati svojim magnetskim momentom, tako se i element namagnećene supstancije, koji je predstavljen mnoštvom Amperovih mikrostruja, može okarakterisati vektorskim zbirom momenata svih elementarnih strujnih kontura $\sum \mathbf{m}$ u fizički maloj zapremini δV . Makroskopska veličina koja karakteriše stanje namagnećenosti u elementu δV definisana je količnikom:

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}}{\delta V}$$

i zove se **vektor magnetizacije**. U svakoj tački nenamagnećene supstancije vektor magnetizacije je nula-vektor. Ako u svakoj tački namagnećenog tela vektor \mathbf{M} ima isti pravac i smer, za to telo kaže se da je homogeno namagnetisano. Ispostavlja se da su kod dijamagnetika i paramagnetika vektori \mathbf{M} i \mathbf{B} kolinearni ($\mathbf{M} \sim \mathbf{B}$) i da M linearno raste sa porastom indukcije stranog magnetskog polja B , pa su zato te supstancije *linearne i izotropne u magnetskom pogledu*. Kod feromagnetika takva kolinearnost između \mathbf{M} i \mathbf{B} ne postoji, kao ni linearna zavisnost između M i B , pa se feromagnetici ponašaju *magnetski nelinearno i anizotropno*.



Sl. 1

Mnoštvo elementarnih magnetskih momenata u fizički maloj cilindričnoj zapremini $\delta V = S \cdot \delta h$ unutar namagnećene supstancije (sl. 1a), može se zameniti ekvivalentnim magnetskim momentom $\mathbf{M} \cdot \delta V$. Zapremina δV može se predstaviti na ekvivalentan način u magnetskom pogledu, vrlo tankom trakom ($\delta h \rightarrow 0$), koja se podudara sa omotačem cilindra (sl. 1b) — u kojoj postoji Amperova mikrostruja označenog smera i intenziteta δI_A , za koju su magnetski moment trake $\delta \mathbf{m}$ ($\delta \mathbf{m} = \delta I_A \cdot \mathbf{S} = \delta I_A \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$) i zapremine δV , $\mathbf{M} \cdot \delta V$ ($\mathbf{M} \cdot \delta V = \mathbf{M} \cdot \mathbf{S} \cdot \delta h$) jednaki. Odatle se dobija da je $\mathbf{M} = (\delta I_A / \delta h) \cdot \mathbf{n}$, a pošto je $\mathbf{M} = M \cdot \mathbf{n}$, to sledi da je $M = |\mathbf{M}| = \delta I_A / \delta h$.

Posmatrajmo sada proizvoljno usvojenu orijentisanu konturu C u supstanciji, gde pored Amperovih mikrostruja δI_A postoje i makroskopske konture sa strujama I_k ($k = \overline{1, n}$), koje se kao beočuzi na lancu zahvataju sa konturom C (sl. 1b).

Pošto se Amperove zamenske mikrostruje i makroskopske struje nalaze u vakuumu, to ćemo primeniti Amperov zakon o cirkulaciji vektora \mathbf{B} u vakuumu na konturu C i sve struje:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \cdot \left(\int_{\text{Kroz } C} \delta I_A + \sum_C \pm I_K \right) \quad \text{Po strujama svih makroskopskih kontura koje se zahvataju sa konturom } C = \mu_0 \cdot \left(\oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \sum_{(k)} \pm I_k \right) \Rightarrow$$

$$\oint_C \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_C \pm I_K \quad \text{Po strujama svih makroskopskih kontura koje se zahvataju sa konturom } C, \quad \mathbf{H} := \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_C \pm I_K \quad \text{Po strujama svih makroskopskih kontura koje se zahvataju sa konturom } C \quad \leftarrow \text{generalisni Amperov zakon.}$$

Vektor \mathbf{H} u prethodnoj relaciji definisan kao $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ zove *vektor jačine magnetskog polja ili magnetizaciono polje*. Jedinica za jačinu magnetskog polja $H = |\mathbf{H}|$ je [A/m]. U sumu struja makroskopskih kontura struja I_k unosi se: (1) sa predznakom "+", ako je istog smera sa obračunskim smerom za sabiranje struja, koji je vezan po pravilu desne zavojnice sa usvojenom orijentacijom konture C (\otimes , "+", videti sl. 1b) i (2) sa predznakom "-", ako je suprotnog smera od obračunskog smera za sabiranje struja (sl. 1b). Generalisani Amperov zakon važi, kako u vakuumu, tako i u bilo kojoj materijalnoj sredini (u dijamagneticima, paramagneticima i feromagneticima). U vakuumu je $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, pa između vektora \mathbf{B} i \mathbf{H} postoji veza $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ što znači da za karakterizaciju magnetskog polja u vakuumu nisu potrebna dva, već je dovoljan samo jedan vektor (\mathbf{B} ili \mathbf{H}).

U supstancijama koje su linearne i izotropne u magnetskom pogledu (dijamagnetici i paramagnetici), vektor magnetizacije \mathbf{M} uvek je kolinearan sa vektorom jačine magnetskog polja \mathbf{H} , pa je zbog toga kod njih $\mathbf{M} = \chi_m \cdot \mathbf{H}$, gde je χ_m *magnetska susceptibilnost*. Pošto je u svakoj sredini $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, to kod linearnih i izotropnih sredina imamo $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \mathbf{H}$. Ako se *relativna magnetska permeabilnost* definiše kao $\mu_r = 1 + \chi_m$, a *apsolutna permeabilnost* kao $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$, tada je $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \mathbf{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H} = \mu \cdot \mathbf{H}$. Kod dijamagnetika je $\chi_m < 0$, pa je $\mu_r = 1 + \chi_m$ *neznatno manje* od jedinice. Kod paramagnetika je $\chi_m > 0$, pa je $\mu_r = 1 + \chi_m$ *neznatno veće* od jedinice. Kod feromagnetika važi samo relacija $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, ali ne i relacija $\mathbf{M} = \chi_m \cdot \mathbf{H}$, jer kolinearnost vektora \mathbf{M} i \mathbf{H} ne postoji.

Granični uslovi na razdvojnoj površi dve sredine

Granični uslovi imaju praktičnu vrednost samo u slučaju kada je jedna sredina feromagnetik, a druga to nije. Granični uslovi na razdvojnoj površi dijamagnetika i/ili paramagnetika nisu od interesa, pošto između tih sredina nema neke značajnije razlike. Na razdvojnoj površi dve sredine neprekidne su normalne komponenti magnetske indukcije i tangencijalne komponente vektora jačine magnetskog polja.

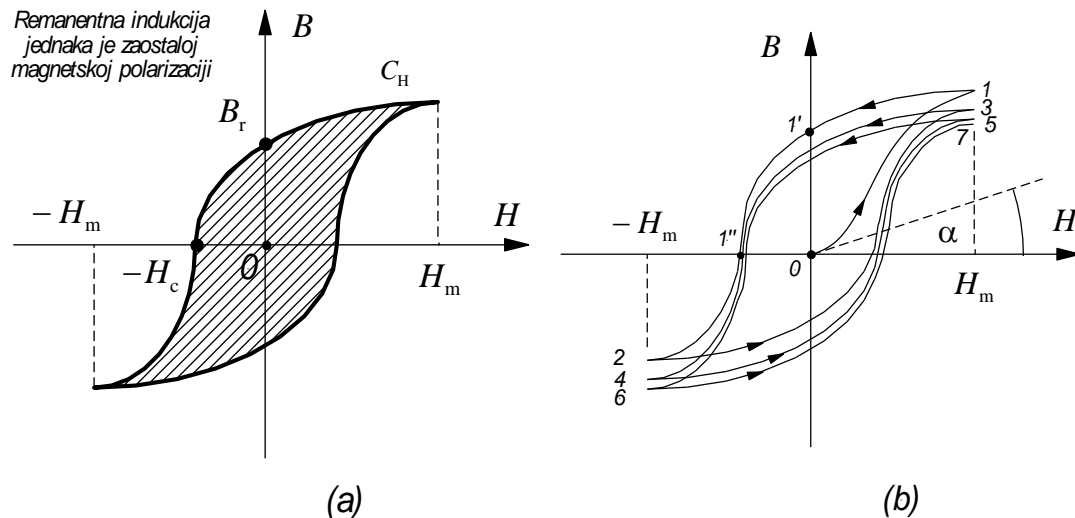
$$B_{1n} = B_{2n} \text{ i } H_{1t} = H_{2t}.$$

U posebnom slučaju kada je jedna sredina vazduh ili vakuum, a druga sredina feromagnetik, linije magnetskog polja u vazduhu ili vakuumu su praktično normalne na razdvojnu površ.

Feromagnetski materijali

Feromagnetici imaju veliku primenu u elektrotehnici za izradu jezgara električnih mašina (generatora, motora i transformatora), stalnih magneta i elektromagneta. Magnetizacija \mathbf{M} i magnetska indukcija \mathbf{B} u feromagnetiku ne zavise samo od trenutne jačine magnetnog polja \mathbf{H} , već

i od jačine polja kome je materijal ranije bio podvrgnut, odnosno zavise od tzv. "istorije magnećenja" materijala. Ta pojava svojstvena je samo feromagnetima i naziva se *histerezis*.



Sl. 3

Ako feromagnetik prethodno nije bio namagnećen, tada se sa porastom jačine polja H , indukcija menja po krivoj 0-1 — od 0 do prevojne tačke na toj krivoj (sl. 3b). Posle toga je porast funkcije $B(H)$ jako usporen jer potiče od člana $\mu_0 \cdot H$, a sama funkcija približava se pravou vrlo malog nagiba prema H -osi. Materijal torusa tada ulazi u magnetsko zasićenje sa gustinom magnetskog momenta M_s . Kriva 0-1 na sl. 3b zove se prvobitna kriva magnećenja i za nju se definiše početna magnetska permeabilnost datog feromagnetika kao, $\mu_a = dB/dH|_{H=0} = \tan \alpha$ (sl. 3b).

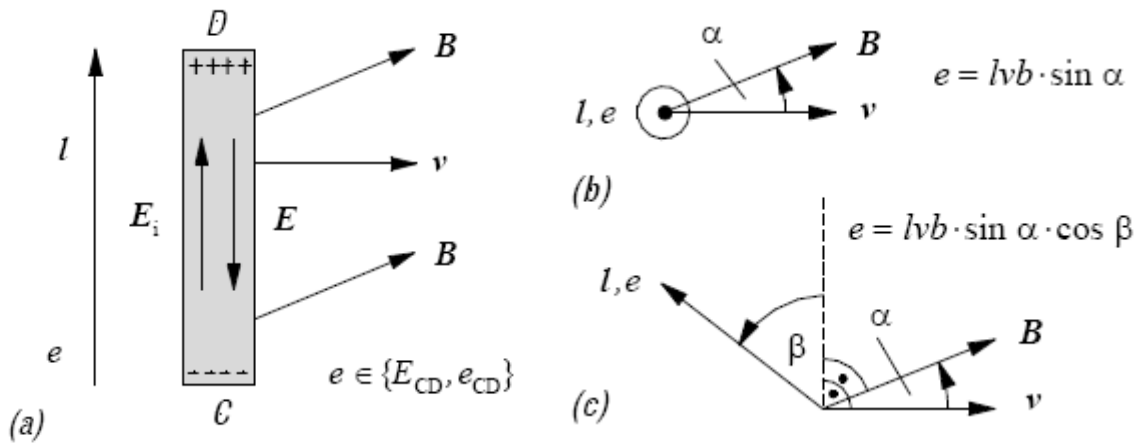
Ako jačina polja posle maksimalne vrednosti H_m počne da opada do nule, magnetska indukcija menja se po krivoj 1-2 ($H \geq 0$) koja se nalazi iznad prvobitne krive magnećenja. Kada bude $H=0$ (tačka 1') u feromagnetiku ostaje prisutna izvesna *remanentna*, ili *zaostala* magnetska indukcija B_r . Njena pojava objašnjava se činjenicom da po prestanku dejstva spoljašnjeg polja magnetski momenti ne dospevaju u prvobitan haotičan poredak. Promenom smera struje i njenim povećavanjem, magnetska indukcija nastavlja da se menja po krivoj 1-2 do tačke 1'' sa koordinatama $(-H_c, 0)$, gde se $H_c > 0$ zove *koercitivno polje*. Materijali sa velikim koercitivnim poljem zovu se *magnetski tvrdi*, a oni kod kojih je to polje malo zovu se *magnetski meki* materijali. Ako polje H i dalje nastavi da opada u negativnom smeru, tada se pri $H=-H_m$ dolazi u tačku 2, gde je indukcija negativna i maksimalna po modulu. Pri sledećoj promeni jačine polja od $-H_m$ do H_m indukcija se menja po krivoj 2-3 (tačka 3 leži malo ispod tačke 1). Pri narednoj promeni H od H_m do $-H_m$ indukcija se menja po krivoj 3-4, a zatim se indukcija ciklično menja po krivoj 4-5, krivoj 5-6, krivoj 6-7 itd. Već posle desetak ciklusa magnećenja kriva $B=B(H)$ prelazi u zatvorenu simetričnu krivu C_H (sl. 3a), koja se zove *ciklus histerezisa*. Oblik te krive zavisi od vrste materijala i maksimalne jačine polja H_m .

Elektromagnetska indukcija.

Bez elektromagnetske indukcije danas se ne bi ni mogao zamisliti rad čitavog niza uređaja od vitalnog značaja u savremenoj elektrotehnici i tehnici uopšte (obrtne električne generatori, indukcionni motori, električni transformatori, prijemne radio i TV antene i slično). Videli smo da je cirkulacija vektora *elektrostatičkog polja* po bilo kojoj (zamišljenoj) konturi ravna nuli. Međutim, kod *provodnih* kontura koje se kreću i/ili deformišu u magnetskom polju (a koje može biti i

vremenski promenljivo), to nije slučaj — *indukovano električno polje* u tim konturama stvara *indukovane* električne struje, čak i kada u konturama ne deluju nikakvi električni generatori. Magnetsko polje uvek je posledica neke električne struje, a *indukovano električno polje* u *nepokretnim sredinama* posledica je *vremenski promenljive električne struje*.

Posmatrajmo *električno neutralan, otvoren, pravolinijski metalni provodnik* na sl. 4a, koji se *translatorsno* kreće brzinom \mathbf{v} kroz *stacionarno homogeno magnetsko polje* indukcije \mathbf{B} . Provodnik je orijentisan u *proizvoljno* usvojenom referentnom smeru od kraja C ka kraju D i upravan je na ravan vektora \mathbf{v} i \mathbf{B} (sl. 4b). Na "slobodne" i lako pokretne elektrone u provodniku deluje **Lorencova sila** $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ i potiskuje ih prema kraju C , koji se zbog toga naelektriše negativno. Istovremeno, kraj D provodnika se zbog manjka elektrona naelektriše pozitivno. Nastali efekat je isti kao da je do premeštanja elektrona došlo pod uticajem *stranog električnog polja* $\mathbf{E}_s = \mathbf{F}_L / -e = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, koje se u posmatranom slučaju zove *indukovano električno polje* \mathbf{E}_i . Sa druge strane, razdvojena naelektrisanja u provodniku stvaraju električno polje \mathbf{E} koje zadovoljava uslov $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \mathbf{0}$, s obzirom da u provodniku nema struje. Taj uslov, inače, postoji kod svih električnih generatora koji rade u *praznom hodu*.



Sl. 4

Dakle, pošto je $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_s = \mathbf{F}_L / -e = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, to je elektromotorna sila e *indukovana* u provodniku koja nastaje usled njegovog kretanja kroz magnetsko polje, data sledećom relacijom:

$$e = \int_C^D \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_C^D \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_C^D (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \int_C^D d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$$

i zove se **dinamički indukovana ems**, a računa se u usvojenom smeru orijentacije provodnika (tj. u smeru \mathbf{l}). Primetimo da u relaciji $\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ne figurišu osobine supstancije od koje je načinjeno pokretno telo. Dakle, bez obzira na materijalni sastav tela koje se kreće kroz magnetsko polje, u tački sa brzinom \mathbf{v} i magnetskom indukcijom \mathbf{B} nastaje indukovano električno polje $\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Iz prethodne relacije sledi da se ems ne indukuje u pravolinijskom provodniku koji se translatorsno kreće u pravcu homogenog magnetskog polja (vektori \mathbf{v} i \mathbf{B} su tada kolinearni), ali da je zato ta ems najveća ako je $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, tj. kada provodnik pri translatorsnom kretanju *preseca* linije polja pod pravim uglom. U tom slučaju indukovana ems je $e = \pm lvB$, gde je $l = |\mathbf{l}|$, $v = |\mathbf{v}|$ i $B = |\mathbf{B}|$. Međutim, ems koja se indukuje u pravolinijskom provodniku pri translatorsnom kretanju kroz homogeno magnetsko polje u slučaju prikazanom na sl. 4b je $e = lvB \sin \alpha$, a u slučaju na sl. 4c je $e = lvB \sin \alpha \cos \beta$.

Faradejev zakon elektromagnetne indukcije:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

indukovana ems u provodnoj konturi jednaka je brzini promene magnetskog fluksa konture uzete sa negativnim predznakom. Taj negativni predznak predstavlja izraz Lencovog pravila.

Lencovo pravilo: Indukovana ems u provodnoj konturi uvek ima takav smer da teži da poništi uzrok svog nastanka – ako se javlja usled porasta magnetskog fluksa kroz konturu, tada ona teži da u konturi stvori struju takvog smera i intenziteta čije se magnetsko polje opire porastu fluksa kroz konturu; i obrnuto, ako indukovana ems nastaje usled smanjenja magnetskog fluksa kroz konturu, tada ona teži da u konturi stvori struju takvog smera i intenziteta čije se magnetsko polje opire smanjenju fluksa kroz konturu. Ems koja nastaje u provodnoj konturi usled promene sopstvene struje i sopstvenog magnetskog fluksa zove se **ems samoindukcije**.

Kada se provodna orijentisana kontura C kreće i/ili deformiše u vremenski promenljivom magnetskom polju, u njoj se indukuje ems e :

$$e = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l},$$

gde je \mathbf{v} brzina, \mathbf{B} magnetska indukcija na mestu vektorskog elementa $d\mathbf{l}$ konture, a $d\mathbf{S}$ vektorski element površi S oslonjene na konturu i orijentisane u smeru vezanom po pravilu desne zavojnice sa orijentacijom konture.

Pojava indukovane ems u konturi obično se posmatra fenomenološki i govori da je uzrok te pojave promena magnetskog fluksa konture, ali pri tome se uvek ima u vidu da je ta ems posledica pojave indukovnog električnog polja \mathbf{E}_i u elementima konture. Dakle, svaka električna struja stvara magnetsko polje, a svako vremenski promenljivo magnetsko polje uvek je praćeno prostorno i vremenski promenljivim indukovanim električnim poljem – tako da se može govoriti o *jedinstvenom elektromagnetskom polju*.

Na osnovu uzroka promene fluksa mogu se razlikovati sledeći slučajevi indukcije:

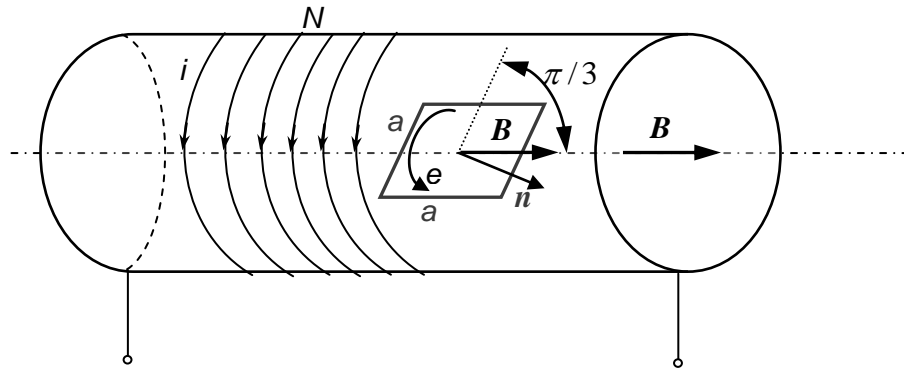
- a) Dinamička elektromagnetska indukcija** nastaje usled relativnog kretanja otvorenog provodnika i/ili konture u stacionarnom magnetskom polju. Pod relativnim kretanjem podrazumeva se i deformacija provodnika i/ili konture.
- b) Statička elektromagnetska indukcija** je pojava kada indukovana ems nastaje u nepokretnoj provodnoj konturi usled vremenski promenljive struje u toj ili nekoj drugoj nepokretnoj konturi. Ems indukovana u konturi usled vremenske promene sopstvene struje zova se ems samoindukcije.
- c) Kombinovana elektromagnetska indukcija** se najčešće javlja u uređajima i sistemima iz svakodnevnice prakse i predstavlja kombinaciju statičke i dinamičke indukcije.

Zadatak 7: Tanak solenoid dužine $d = 40\text{cm}$ ima $N = 300$ ravnomerno i gusto namotanih zavoja. Struja u namotajima solenoida menja se po zakonu $i(t) = 10 \sin(1000t)[\text{A}]$. U sredini solenoida nalazi se kvadratno kolo stranice $a = 2\text{cm}$. Odrediti indukovanu elektromotornu silu u kvadratnom kolu.

Rešenje:

U solenoidu postoji homogena magnetna indukcija čiji je intenzitet:

$$B(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 10 \cdot \sin(1000t)}{0.4} = 3\pi \cdot 10^{-3} \cdot \sin(1000t) = 3\pi \cdot \sin(1000t)[\text{mT}].$$



Pravac i smer vektora \mathbf{B} i smer struje kroz namotaje solenoida vezani su pravilom desne zavojnice. Za usvojeni smer normale \mathbf{n} na površinu oslonjenu na kvadratno kolo u sredini solenoida, kao na slici, magnetski fluks iznosi:

$$\Phi(t) = B \cdot S \cdot \cos \angle(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = B \cdot a^2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\mu_0 N i(t)}{d} \cdot a^2 \cdot \cos \frac{\pi}{6},$$

a nakon zamene brojnih vrednosti i izračunavanja:

$$\Phi(t) = 32.65 \cdot 10^{-7} \sin(1000t) \text{ [Wb]}.$$

Vektor \mathbf{B} je homogen po površini kvadratnog kola, a $\angle(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$.

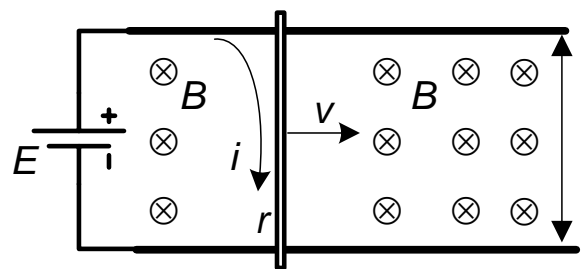
Indukovana elektromotorna sila e u kvadratnom kolu za referentni smer označen na slici je onda:

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 N a^2 \cos \frac{\pi}{6}}{d} \cdot \frac{di(t)}{dt},$$

$$e(t) = -6\pi\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot \cos(1000t) \text{ [V]} \approx -3.26 \cdot \cos(1000t) \text{ [mV]}.$$

Zadatak 8: Prav provodnik otpornosti $r = 2[\Omega]$ klizi, bez trenja, po veoma dugačkim paralelnim provodnim šinama zanemarljive otpornosti. Rastojanje između šina je $L = 0.2[\text{m}]$, a ceo sistem se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije $B = 1[\text{T}]$, normalne na ravan šina. Na jednom kraju provodne šine su priključene na bateriju vremenski konstantne elektromotorne sile $E = 1.5[\text{V}]$, a drugi kraj šina je otvoren. Kolika je jačina struje kroz provodnik u odnosu na dati referentni smer, ako je:

- provodnik nepokretan,
- provodnik se kreće brzinom $v = 5[\text{m/s}]$ u označenom smeru,
- provodnik se kreće istom brzinom u suprotnom smeru.



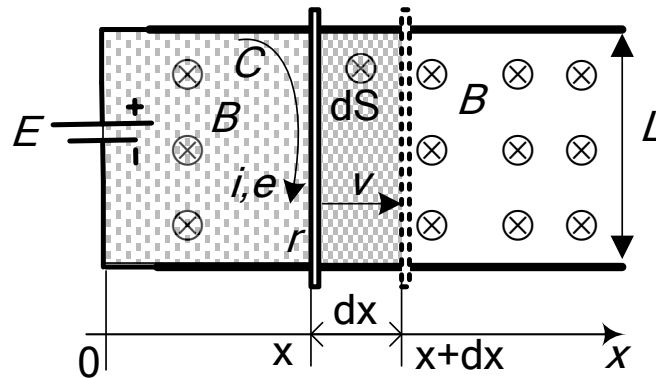
Rešenje:

a) Ako provodnik miruje u njemu se ne indukuje elektromotorna sila pa je struja provodnika u označenom referentnom smeru:

$$i(t) = I = \frac{E}{r} = \frac{1.5[\text{V}]}{2[\Omega]} = 0.75[\text{A}].$$

b) Ako se provodnik kreće brzinom v tako da preseca linije magnetskog polja u njemu se indukuje elektromotorna sila. Posmatrajmo zatvorenu, provodnu konturu C koju obrazuju baterija, provodne šine i provodnik. Posle vremena dt provodnik se pomeri za rastojanje $dx = v \cdot dt$ u smeru brzine kretanja, a

površina konture C se poveća za $dS = Ldx = Lvdt$. Promena površine konture C uzrokuje promenu magnetskog fluksa Φ kroz konturu, a promena fluksa u vremenu indukuje elektromotornu silu u konturi prema Faradejevom zakonu.

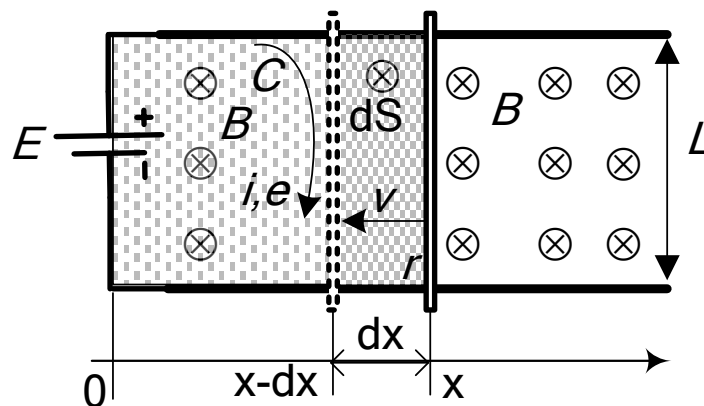


Neka je kontura C orijentisana kao na slici. U odnosu na isti referentni smer konture računaju se fluks i indukovana elektromotorna sila. Kako je $d\Phi = +\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BLdx = BLv \cdot dt$, jer je u pitanju porast fluksa, indukovana ems u konturi je:

$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BLv \cdot dt}{dt} = -BLv$, sa smerom kao na slici. Struja u provodniku je onda

$$i(t) = \frac{E + e(t)}{r} = \frac{E + e(t)}{r} = \frac{E - BLv}{r} = \frac{1.5 - 1 \cdot 0.2 \cdot 5}{2} = 0.25[\text{A}] \text{ u označenom smeru.}$$

b) Postupajući analogno prethodnom slučaju, dobija se $d\Phi = -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -BLdx = -BLv \cdot dt$, jer je sada u pitanju smanjenje fluksa kroz konturu zbog smanjenja površine konture.



Indukovana ems u konturi C je:

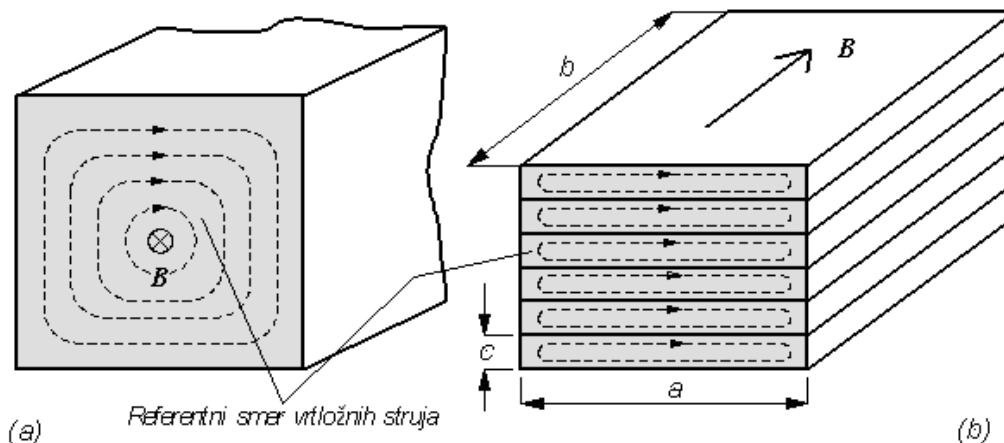
$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{-BLv \cdot dt}{dt} = BLv$, sa smerom kao na slici. Struja u provodniku je sada

$$i(t) = \frac{E + e(t)}{r} = \frac{E + e(t)}{r} = \frac{E + BLv}{r} = \frac{1.5 + 1 \cdot 0.2 \cdot 5}{2} = 1.25[\text{A}] \text{ u označenom smeru.}$$

Vrtložne struje

Kada vremenski promenljivo magnetsko polje postoji u masivnim metalnim provodnicima kao što su, na primer, feromagnetska jezgra transformatora i prigušnica i magnetska kola električnih mašina, onda se u njima indukuje promenljivo električno polje koje proizvodi *vihorne*, *vrtložne* ili *Fukoove* struje čije se strujnice zahvataju sa linijama magnetskog polja kao beočizi na lancu. Vrtložne struje utoliko su većeg intenziteta ukoliko su provodnici bolji. U mnogim

slučajevima pojava tih struja dvostruko je štetna: a) pošto su feromagneti koji se koriste za izradu jezgara magnetskih kola obično dobri provodnici, to se u njima indukuju vrtložne struje velikog intenziteta koje usled Džulovog efekta proizvode neželjeno zagrevanje tih delova mašina i uređaja i tako dovode do nepotrebnih energetske gubitaka i b) sopstveno magnetsko polje vrtložnih struja superponira se na primarno polje, pa se po Lencovom zakonu smanjuje ukupan fluks magnetskog kola, a osim toga on se i neravnomerno raspodeljuje po preseku kola. To je ilustrovano na sl. 5a, gde je prikazan presek jednog feromagnetskog jezgra sa vremenski promenljivim primarnim magnetskim poljem indukcije B . Pošto je magnetsko polje indukovanih struja najveće u sredini jezgra, tu je najveće i slabljenje primarnog fluksa. Zbog toga je resultantna magnetska indukcija najveća uz graničnu površ jezgra i opada prema njegovoj unutrašnjosti.

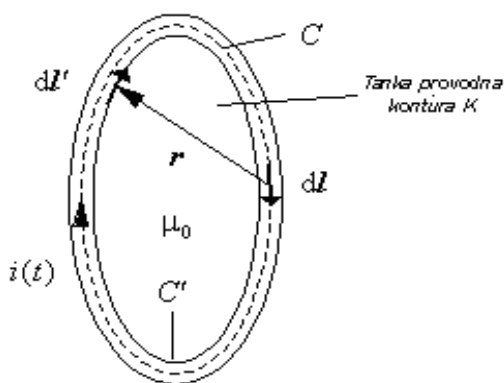


Sl. 5

Da bi se pomenuti neželjeni efekti u jezgrima magnetskih kola sveli na što manju meru (Džulovi gubici i neravnomernost raspodele fluksa po preseku), jezgra se izrađuju od tankih i međusobno lakovima ili oksidima izolovanih feromagnetskih limova (sl. 5b). Limovi su legirani sa nekoliko procenata silicijuma da bi se smanjila njihova specifična električna provodnost. Osim toga, limovi se postavljaju tako da linije magnetskog polja budu paralelne njihovoj većoj površi, a nikako da budu upravne na nju.

Sopstvena induktivnost

Posmatrajmo tanku, usamljenu provodnu konturu K u vazduhu sa vremenski promenljivom strujom $i(t)$ (sl. 6a). U okolini konture postoji vremenski promenljivo magnetsko i indukovano električno polje. To električno polje duž konture K generiše ems e koja se zove *ems samoindukcije*,



Sl. 6.a

a sama pojava naziva se *samoindukcija*. Magnetsko polje koje stvara struja konture $i(t)$ generiše i sopstveni magnetski fluks Φ kroz konturu proporcionalan struji $i(t)$, pošto je kontura u magnetski linearnoj sredini.

Dakle, u linearnoj sredini je $\Phi = L \cdot i(t)$, gde se koeficijent proporcionalnosti $L = \Phi(t) / i(t)$ koji zavisi od veličine i oblika konture, kao i magnetskih osobina sredine naziva *sopstvena induktivnost*, *samoinduktivnost*, ili prosto *induktivnost* konture K . Jedinica za induktivnost je *Henri* [H].

Ems indukovana u konturi prema Faradejevom

zakonu određena je relacijom $e = -d\phi/dt = -L \cdot di/dt$. Relacije $\phi = L \cdot i(t)$ i $e = -L \cdot di/dt$ važe kada je struja $i(t)$ vremenski konstantna ($=I$), ali i vremenski čak brzo promenljiva (mada ne i ekstremno brzo).

Zbog toga se induktivnost konture obično određuje iz relacije $L = \phi/I$, gde je I vremenski konstantna struja, a ϕ *sopstveni magnetski fluks konture*.

Zadatak 9: Na torusu od neferomagnetnog materijala prikazanom na slici ravnomerno i gusto namotano je N zavoja žice u jednom sloju.

- Odrediti tačnu induktivnost torusa.
- Odrediti približnu induktivnost torusa smatrajući torus tankim.

Rešenje:

Sopstvena induktivnost torusa je odnos sopstvenog fluksa kroz torusni namotaj i jačine struje namotaja, $L = \Phi / I$.

Zbog povezanosti referentnih smerova struje, magnetne indukcije i normale na površinu namotaja, sopstvena induktivnost L je uvek pozitivna veličina.

Kada se kroz namotaj od N zavoja uspostavi struja jačine I , magnetska indukcija u torusu je, na osnovu Amperovog zakona,

$$B(x) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi \cdot x}, \quad a \leq x \leq b.$$

Sopstveni magnetni fluks kroz N namotaja na torusu je onda:

$$\Phi = N \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_a^b B dS \cdot \cos(\vec{B}, \vec{n}) = N \int_a^b \mu_0 \frac{NI}{2\pi x} d \cdot dx = \mu_0 \frac{N^2 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Tačna induktivnost torusnog namotaja je:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

b) Magnetna indukcija na srednjoj liniji torusa iznosi: $B = \mu_0 \frac{NI}{\pi(a+b)}$, gde je $r_{sr} = (a+b)/2$, srednji poluprečnik torusa. Sopstveni fluks kroz N namotaja tankog torusa je onda:

$$\Phi_{prib} = N \mu_0 \frac{NI}{\pi(a+b)} d(b-a) = \mu_0 N^2 I d \frac{b-a}{\pi(a+b)},$$

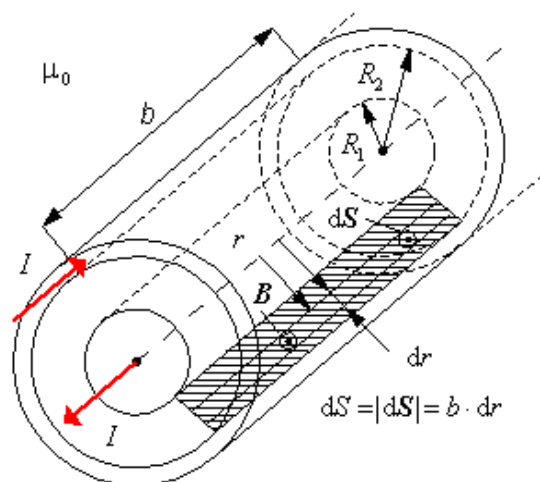
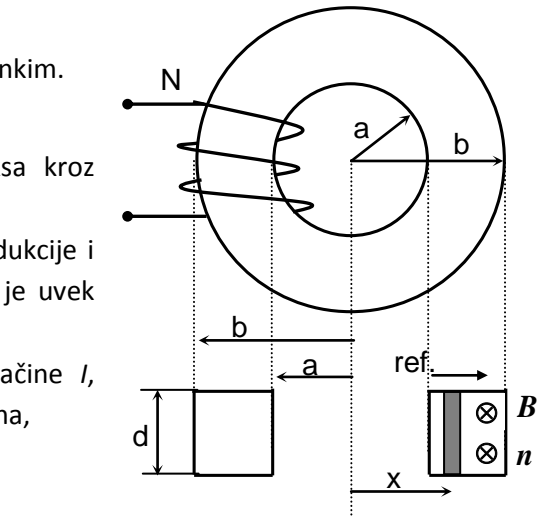
jer se magnetno polje može smatrati homogenim po poprečnom preseku torusa. Približna induktivnost je

$$L_{prib} = \mu_0 \frac{N^2 d(b-a)}{\pi(a+b)}.$$

Zadatak 10: Odrediti podužnu spoljašnju induktivnost L_s' dugog koaksijalnog vazdušnog voda kod koga je $R_2/R_1 = e$. Zanemariti efekat krajeva.

Rešenje:

Elementaran magnetski fluks $d\phi$ kroz elementarnu trakastu površ dužine b i debljine dr , ukupan fluks ϕ kroz šrafiranu površ iste dužine i debljine $R_2 - R_1$, spoljašnja induktivnost L_s odsečka voda dužine b i njegova podužna spoljašnja induktivnost L_s' – dati su sledećim relacijama:

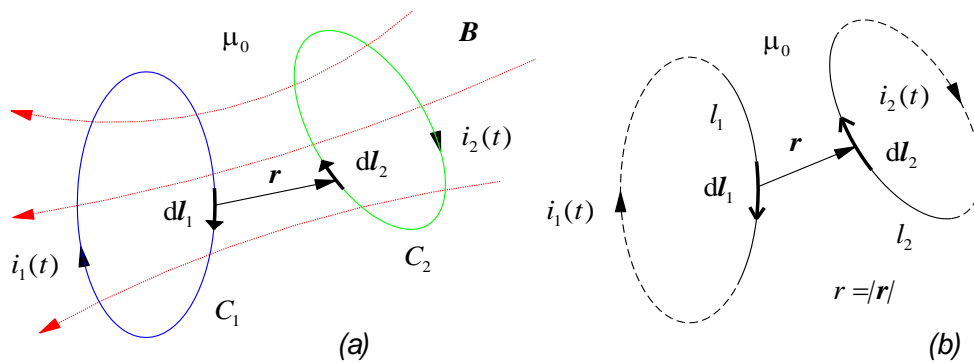


$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cdot dS = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot b \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r},$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b}{2\pi} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

$$L_s = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \cdot b}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right), \quad L_s' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 0.2 \text{ } [\mu\text{H/m}].$$

Međusobna induktivnost. Posmatrajmo dve tanke i nepokretne *provodne* konture C_1 i C_2 u vazduhu (sl. 7a) u kojima postoje vremenski promenljive struje $i_1(t)$ i $i_2(t)$, respektivno. Svaka od njih u okolnom prostoru stvara vremenski promenljivo magnetsko i električno polje. Pošto je sredina u kojoj se konture nalaze linearna u magnetskom pogledu, to je indukcija svake od njih proporcionalna struji konture.



Sl. 7

Dakle, kada se dve tanke, provodne konture C_1 i C_2 nađu u magnetski linearnoj sredini tada su fluks Φ_{12} magnetskog polja struje konture C_1 kroz konturu C_2 i fluks Φ_{21} magnetskog polja struje konture C_2 kroz konturu C_1 dati sledećim relacijama:

$$\Phi_{12} = L_{12} \cdot I_1 \quad \vee \quad \Phi_{12} = L_{12} \cdot i_1; \quad \Phi_{21} = L_{21} \cdot I_2 \quad \vee \quad \Phi_{21} = L_{21} \cdot i_2,$$

gde se koeficijenti proporcionalnosti L_{12} i L_{21} , koji zavise od magnetskih osobina sredine, veličine, oblika i položaja kontura, zovu *međusobne induktivnosti* kontura. Primetimo i da te induktivnosti mogu biti pozitivne ili negativne, što nema neki određen fizički smisao, već je to posledica odnosa usvojenih orijentacija kontura. Na primer, za konture na sl. 7a međusobna induktivnost je pozitivna, a promenom orijentacije samo jedne od njih ta induktivnost postaje negativna. Jedinica za međusobnu induktivnost je takođe *Henri* [H]. Između međusobnih induktivnosti bilo koje dve tanke konture u linearnoj sredini postoji sledeća fundamentalna veza $L_{12} = L_{21}$.

Iz Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije sledi da je ukupna indukovana elektromotorna sila u svakoj od kontura repektivno:

$$e_1 = e_{11} + e_{21} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{11} \cdot \frac{di_1}{dt} - L_{21} \cdot \frac{di_2}{dt} \quad i$$

$$e_2 = e_{22} + e_{12} = -\frac{d\Phi_{22}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{22} \cdot \frac{di_2}{dt} - L_{12} \cdot \frac{di_1}{dt} \quad .$$

Sa e_{11} i e_{22} označene su ems samoindukcija kontura, a sa e_{12} i e_{21} ems međusobnih indukcija.

Energija magnetskog polja

Zapreminska gustina energije magnetskog polja $w_m = dW_m/dV$, u opštem slučaju je:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \int_{B_0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

gde je B dostignut intenzitet magnetske indukcije u stacionarnom stanju, a B_0 indukcija u supstanciji neposredno pre uključivanja struja koje generišu magnetizaciono polje. Kod dijamagnetika i paramagnetika, kao i feromagnetika koji prethodno nisu bili magnećeni, imamo da je $B_0=0$.

Zapreminska gustina energije w_m apsorbovane od strane magnetskog polja u *linearnim sredinama* (u takve spadaju dijamagnetici i paramagnetici kod kojih je uvek $\mathbf{B}=\mu\cdot\mathbf{H}$) data je relacijom:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \int_{B_0=0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \int_{B_0=0}^B H \cdot dB = \mu \cdot \int_{H_0=0}^H H \cdot dH = \frac{\mu \cdot H^2}{2} = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} ,$$

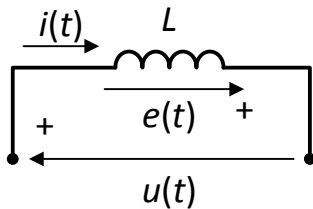
gde je $B=|\mathbf{B}|$, $H=|\mathbf{H}|$, dok je $\mu \approx \mu_0$ konstantna magnetska permeabilnost sredine.

Zapreminska gustina energije w_m koju apsorbuje magnetsko polje u *nelinearnoj sredini* (to su pre svega feromagnetici data je relacijom:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \int_{B_0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} ,$$

pri čemu je indukcija $B=|\mathbf{B}|$ *nelinearna i višeznačna funkcija* jačine magnetizacionog polja $H=|\mathbf{H}|$, dok je u opštem slučaju početna indukcija $B_0 \neq 0$.

Akumulisana magnetna energija kalema



Kalem se najčešće realizuje u obliku solenoidnog ili torusnog namotaja sa jednim ili više slojeva navojaka i vazдушnim ili feromagnetskim jezgrom. Induktivnost kalema sa N zavojsa, određuje iz relacije $L=\Phi/I$, gde je Φ fluks kalema, a I struja kalema. Primetimo da su algebarski znak fluksa Φ i ems

samoindukcije $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt}$ vezani sa usvojenom

orijentacijom zavojsa koja je u *smeru struje* $i(t)$. Sledi $u(t) = -e(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ sa usaglašenim

referentnim smerovima struje i napona kalema kao na slici.

Akumulisana magnetska energija linearnog kalema induktivnosti L u kojem postoji struja $i(t)$ i magnetski fluks $\Phi(t)$ data je sledećom relacijom:

$$W_m(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t) = \frac{1}{2} \cdot \Phi(t) \cdot i(t) = \frac{\Phi^2(t)}{2L}$$