11 Диференцијалне једначине првог реда

Јендачина облика
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$
у којој фигурише бар један од извода *непознате функције* $y = y(x)$ је *диференцијална једначина.*

Ред диференцијалне једначине је ред највећег извода који у њој фигурише.

Нормални облик диференцијалне једначине је
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Овде радимо само диференцијалне једначине првог реда, тј. облика $F(x, y, y') = 0$.

11.1 Диференцијалне једначине које раздвајају променљиве

Ако се диференцијална једначина може написати у облику
$$f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y,$$
тада њено опште решење добијамо интеграљењем (квадратуром):
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y + C.$$

Пример 11.1. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(1 + e^x)yy' = e^x$.

Како је $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, дату диференцијалну једначину можемо записати у облику
$$y\,\mathrm{d}y = \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1 + e^x},$$
па је њено опште решење
$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1 + e^x}, \quad \text{тј.} \quad \frac{y^2}{2} + C = \ln(1 + e^x),$$
што се може записати и у облику
$$C_1 e^{y^2/2} = 1 + e^x \qquad (C_1 = e^C).$$

Пример 11.2. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'(\,\mathrm{ctg}^2 x - 3) = 1$.

Дата једначина се може записати у облику $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ctg}^2 x - 3}$, па је њено опште решење
$$y = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ctg}^2 x - 3} = \left[\begin{array}{c} \mathrm{ctg}x = t, \\ \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t/(1 + t^2) \end{array}\right] = -\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 - 3)(t^2 + 1)} = \frac{1}{8\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\mathrm{ctg}x + \sqrt{3}}{\mathrm{ctg}x - \sqrt{3}}\right| - \frac{1}{4}x + C.$$

11.2 Хомогена диференцијална једначина

Пример 11.3. Решити диференцијалну једначину $(4x + 3y + 1)\,\mathrm{d}x + (x + y + 1)\,\mathrm{d}y = 0$.

Напишимо дату једначину у облику $y' = -\dfrac{4x + 3y + 1}{x + y + 1}$. Сменама $x = X + A$, $y = Y + B$ за одговарајуће A и B, ова једначина се своди на хомогену. У једначини
$$Y' = -\frac{4X + 4A + 3Y + 3B + 1}{X + A + Y + B + 1}$$
бирамо A и B тако да важи
$$4A + 3B + 1 = 0 \quad \text{и} \quad A + B + 1 = 0.$$

Решење горњег система је $A=2$ и $B=-3$, па полазна једначина постаје $Y'=-\dfrac{4X+3Y}{X+Y}$, тј. $Y'=-\dfrac{4+3\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$. Сменом $z=\frac{Y}{X}$, одакле је $Y'=z'X+z$, добијамо

$$z'X+z=-\frac{4+3z}{1+z}, \quad \text{односно} \quad -\frac{1+z}{(2+z)^2}dz=\frac{dX}{X}, \text{ одакле је}$$

$$-\int\frac{2+z-1}{(2+z)^2}dz=\int\frac{dX}{X}, \quad \text{односно} \quad -\ln|2+z|-\frac{1}{2+z}+C=\ln|X|.$$

Дакле, опште решење хомогене једанчине је

$$-\frac{1}{2+\frac{Y}{X}}+C=\ln\left|X\left(2+\frac{Y}{X}\right)\right|, \quad \text{тј.} \quad C_1e^{-\frac{X}{2X+Y}}=2X+Y,$$

а опште решење полазне једначине је

$$C_1e^{\frac{2-x}{2x+y-1}}=2x+y-1.$$

11.3 Линеарна диференцијална једначина

Пример 11.4. Наћи решење диференцијалне једначине $(\sin y+x\ \mathrm{tg} y)y'=1$ које задовољава услов $y(1)=0$.

Користимо да је $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x'}$, па је дата једначина еквивалентна линеарној једначини $x'-x\ \mathrm{tg}y=\sin y$. Опште решење је

$$x(y)=e^{-\int p(y)\ \mathrm{d}y}\left(C+\int q(y)e^{\int p(y)\ \mathrm{d}y}\ \mathrm{d}y\right), \quad \text{где је} \quad p(y)=-\ \mathrm{tg}\, y \ \text{ и } \ q(y)=\sin y.$$

Како је $\displaystyle\int p(y)\ \mathrm{d}y=-\int\ \mathrm{tg}\, y\ \mathrm{d}y=\ln|\cos y|+C$, добијамо

$$x(y)=\frac{1}{\cos y}\left(C+\int\sin y|\cos y|\ \mathrm{d}y\right)=\frac{1}{\cos y}\left(C-\int\cos y\ \mathrm{d}(\cos y)\right)=\frac{C}{\cos y}-\frac{\cos y}{2}.$$

Партикуларно решење налазимо из услова $1=\frac{C}{\cos 0}-\frac{\cos 0}{2}$, па је $C=\frac{3}{2}$ и тражено решење је

$$x=\frac{3}{2\cos y}-\frac{\cos y}{2}.$$

11.4 Бернулијева диференцијална једначина

Пример 11.5. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Дата једначина је еквивалентна једначини $x'=\frac{x^2+y^2}{x}$, тј. $x'-x=\frac{y^2}{x}$, што је Бернулијева једначина, $x=x(y)$. Множењем те једначине са x и увођењем смене $x^2=z$, $2xx'=z'$ сводимо је на линеарну једначину $z'-2z=2y^2$. Опште решење је

$$z=e^{\int 2\ \mathrm{d}y}\left(C+\int 2y^2e^{-\int 2\ \mathrm{d}y}\ \mathrm{d}y\right)=e^{2y}\left(C+\int 2y^2e^{-2y}\ \mathrm{d}y\right),$$

$$\begin{aligned}\int 2y^2e^{-2y}\ \mathrm{d}y &= \begin{bmatrix} u=2y^2, & \mathrm{d}v=e^{-2y}\ \mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u=4y\ \mathrm{d}y, & v=-e^{-2y}/2\end{bmatrix}=-y^2e^{-2y}+\int 2ye^{-2y}\ \mathrm{d}y \\ &= \begin{bmatrix} u=2y, & \mathrm{d}v=e^{-2y}\ \mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u=2\ \mathrm{d}y, & v=-e^{-2y}/2\end{bmatrix}=-y^2e^{-2y}-ye^{-2y}-e^{-2y}/2+C.\end{aligned}$$

Дакле, опште решење је

$$x^2=Ce^{2y}-\frac{1}{2}\left(2y^2+2y+1\right).$$

11.5 Диференцијална једначина са тоталним диференцијалом

Пример 11.6. Наћи опште решење диференцијалне једначине $2x\sqrt{y^2-x^2}dx-(1+2y\sqrt{y^2-x^2})dy=0$.

Нека је $M=M(x,y)=2x\sqrt{y^2-x^2}$ и $N=N(x,y)=-1-2y\sqrt{y^2-x^2}$. Како је $M'_y=N'_x=\frac{2xy}{\sqrt{y^2-x^2}}$, дата једначина је са тоталним диференцијалом. Опште решење је

$$u=\int 2x\sqrt{y^2-x^2}\,\mathrm{d}x+\varphi(y)=-\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\varphi(y),$$

где је $u'_y=N$, тј. $-1-2y\sqrt{y^2-x^2}=-2y\sqrt{y^2-x^2}+\varphi'(y)$. Дакле, $\varphi'(y)=-1$ и $\varphi(y)=-y+C$, па је опште решење

$$u=-\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-y+C.$$

Пример 11.7. Наћи интеграциони фактор једначине $(x-\cos y)\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y=0$, ако је познато да је он облика $\mu(x,y)=\lambda(x)$. Уз помоћ њега решити дату једначину.

Нека је $M=M(x,y)=x-\cos y$ и $N=N(x,y)=-\sin y$. Дата једначина није потпуни диференцијал, јер је $M'_y=\sin y\neq N'_x=-\cos y$. Тражимо функцију $\lambda=\lambda(x)$ за коју важи $(\lambda(x)\cdot M)'_y=(\lambda(x)\cdot N)'_x$, тј.

$(\lambda(x)\cdot(x-\cos y))'_y=(\lambda(x)\cdot(-\sin y))'_x$, одакле добијамо диференцијалну једначину $\dfrac{\mathrm{d}\lambda(x)}{\mathrm{d}x}=-\,\mathrm{d}x$, чије је опште решење $\lambda(x)=Ce^{-x}$. Дакле, можемо узети да је интеграциони фактор $\lambda(x)=e^{-x}$.

Једначина $e^{-x}(x-\cos y)\,\mathrm{d}x-e^{-x}\sin y\,\mathrm{d}y=0$ јесте једначина са тотланим диференцијалом, јер је $M'_y=(e^{-x}(x-\cos y))'_y=e^{-x}\sin y=N'_x=(-e^{-x}\sin y)'_x$. Опште решење тражимо у облику

$$u(x,y)=\int Mdx+\varphi(y)=\int e^{-x}(x-\cos y)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)=e^{-x}(\cos y-x-1)+\varphi(y).$$

Даље је $u'_y=N=-e^{-x}\sin y=-e^{-x}\sin y+\varphi'(y)$, одакле је $\varphi(y)=C$. Дакле,

$$u(x,y)=e^{-x}(\cos y-x-1)+C.$$

Пример 11.8. Наћи интеграциони фактор једначине $(xy^2-2y^3)\,\mathrm{d}x+(3-2xy^2)\,\mathrm{d}y=0$, ако је познато да је он облика $\mu(x,y)=\lambda(x)$. Уз помоћ њега решити дату једначину.

Нека је $M=M(x,y)=xy^2-2y^3$ и $N=N(x,y)=3-2xy^2$. Дата једначина није потпуни диференцијал, јер је $M'_y=2xy-6y^2\neq N'_x=-2y^2$. Тражимо функцију $\lambda=\lambda(y)$ за коју важи $(\lambda(y)\cdot M)'_y=(\lambda(y)\cdot N)'_x$, одакле добијамо диференцијалну једначину $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}=-2\frac{\mathrm{d}y}{y}$ чије је опште решење $\lambda(x)=\frac{C}{y^2}$. Дакле, можемо узети да је интеграциони фактор $\lambda(x)=\frac{1}{y^2}$.

Једначина $(x-2y)\,\mathrm{d}x+\left(\frac{3}{y^2}-2x\right)\,\mathrm{d}y=0$ јесте једначина са тоталним диференцијалом, јер је $M'_y=(x-2y)'_y=-2=N'_x=\left(\frac{3}{y^2}-2x\right)'_x$.

Опште решење је облика $u(x,y)=C$, где је $u'_x=M$ и $u'_y=N$. Из прве једнакости следи да је $u(x,y)=\int M\,\mathrm{d}x+\varphi(y)=\frac{x^2}{2}-2xy+\varphi(y)$. Диференцирањем последње једнакости по y добијамо да је $\varphi'(y)=\frac{3}{y^2}$, одакле је $\varphi(y)=-\frac{3}{y}+C$. Дакле, опште решење је

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}-2xy-\frac{3}{y}+C.$$

Пример 11.9. Наћи интеграциони фактор једначине $y\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2-x)\,\mathrm{d}y=0$, ако је познато да је он облика $\mu(x,y)=\lambda(x^2+y^2)$. Уз помоћ њега решити дату једначину.

Нека је $M=M(x,y)=y$ и $N=N(x,y)=x^2+y^2-x$. Дата једначина није потпуни диференцијал, јер је $M'_y=1\neq N'_x=2x-1$. Тражимо функцију $\lambda=\lambda(t)$, $t=x^2+y^2$ за коју важи $(\lambda(t)\cdot M)'_y=(\lambda(t)\cdot N)'_x$, одакле добијамо диференцијалну једначину $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}=-\frac{\mathrm{d}t}{t}$, па је интеграциони фактор $\lambda=\frac{1}{t}=\frac{1}{x^2+y^2}$.

Решимо сада диференцијалну једначину са тоталним диференцијалном $M_1\,\mathrm{d}x+N_1\,\mathrm{d}y=0$, где је $M_1=\lambda M=-\frac{y}{x^2+y^2}$ и $N_1=\lambda N=\frac{x-x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Опште решење је функција $u(x,y)=C$ за коју важи $u'_x=M_1$, па је

$$u(x,y)=\int M_1\,\mathrm{d}x+\varphi(y)=-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

Даље, како је $u'_y = N_1$ важи

$$\frac{x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x/y^2}{(x/y)^2 + 1} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi(y) = -y + C.$$

Дакле, опште решење је

$$u(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - y + C.$$

11.6 Ортогоналне и изогоналне трајекторије

Пример 11.10. Одредити изогоналну трајекторију под углом $\alpha = 45^\circ$ за фамилију кривих $y = C/x$ која пролази кроз тачку $(1, 3)$.

Диференцијалну једначину дате фамилије добијамо диференцирајући једначину $xy = C$: $y + xy' = 0$. Диференцијална једначина изогоналних трајеторија које секу дату фамилију под углом 45° добијамо заменом y' са $\frac{y' - \operatorname{tg}45^\circ}{1 + y' \operatorname{tg}45^\circ} = \frac{y'-1}{y'+1}$:

$$y + x\frac{y' - 1}{y' + 1} = 0, \quad \text{тј.} \quad y' = \frac{y - x}{y + x},$$

што је хомогена диференцијална једначина. Решавамо је сменом $\frac{y}{x} = z$, $y' = z'x + z$ и добијамо једначину са раздвојеним променљивим

$$\frac{z + 1}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{чије је опште решње} \quad \ln\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\ln x + C.$$

Ако заменимо $(x, y) = (1, 3)$ у претходну једначину добијамо $C = \ln\sqrt{10} + \operatorname{arctg}3$ - па се тражена изогонална трајекторија добија за ту вредности константе C из општег решења.