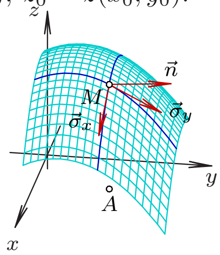
7 Парцијални изводи - примене

7.1 Тангентна раван

Нека је $z = z(x, y)$ непрекидно диференцијабилна (глатка) функција две променљиве. Њен график је нека површ у $\mathbb{R}^3$. Тангентна раван у тачки $A(x_0, y_0)$ је раван која садржи све тангентне векторе кривих на површи које пролазе кроз тачку $M(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$.



Да бисмо нашли једначину тангентне равни, треба нам *нормала на површ* z у одговарајућој тачки. Како је вектор положаја произвољне тачке на површи $\vec{\sigma} = (x, y, z(x, y))$, тангентни вектори на координатне криве $z(x, y_0)$ и $z(x_0, x)$ у тачки $A(x_0, y_0)$ су редом

$$\vec{\sigma}_x = (1, 0, z'_x(x_0, y_0)) \quad \text{и} \quad \vec{\sigma}_y = (0, 1, z'_y(x_0, y_0)).$$

Нормала $\vec{n}$ на површ z је нормална на ова два вектора, па је

$$\vec{n} = \vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & z'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = (-z'_x(x_0, y_0), -z'_y(x_0, y_0), 1).$$

Теорема 7.1. Једначина тангентне равни глатке површи $z{=}z(x, y)$ у тачки $A(x_0, y_0)$ је

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ако је површ $z = z(x, y)$ дата имплицитно функцијом $F(x, y, z) = 0$, тада је нормала на повш у тачки $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{n} = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)),$$

па је једначина тангентне равни у тачки M

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0.$$

У случају параметарски дате површи $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, може се узети да је $\vec{n} = \vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v$, где је $\vec{\sigma}_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ и $\vec{\sigma}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$.

Пример 7.1. На површи датој једначином $F(x, y, z) = x^2 + yz + z - 1 = 0$ наћи тачку у којој је тангентна раван нормална на праву $l : x = y = z$.

Тражимо тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ на површи F у којој је номала на површ

$$\vec{n}(M) = (F'_x, F'_y, F'_z)(M) = (2x_0, z_0, y_0 + 1)$$

паралелна вектору правца $\vec{l}$ праве $l : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, тј. вектору $\vec{l} = (1, 1, 1)$. Следи да ти вектори морају бити пропорционални, дакле,

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{z_0}{1} = \frac{y_0 + 1}{1}, \quad \text{тј.} \quad z_0 = 2x_0, \; y_0 = 2x_0 - 1.$$

Како тачка M лежи на површи F, важи:

$$x_0^2 + (2x_0 - 1)(2x_0) + 2x_0 - 1 = 0, \quad \text{тј.} \quad 5x_0^2 = 1, \quad \text{одакле је} \quad x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тада је $z_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $y_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} - 1$. Дакле, постоје две такве тачке $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} - 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} - 1, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

7.2 Тејлоров полином

Нека је $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ диференцијабилна функција и $\mathbf{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ тачка унутар њеног домена. Тада је линеарна апроксимација (тангентном равни) у околини тачке A

$$f(\mathbf{x}) \approx T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

заправо *Тејлоров полином* првог степена за функцију f у околини тачке $\mathbf{a}$.

Ипак, оваква апроксимација нам често неће бити довољна, па под условом да је функција f диференцијабилна довољан број пута, можемо апроксимирати функцију f Тејлоровим полиномом T_k степена k. Тада ће се вредности функције f и свих њених извода до реда k поклапати са одговарајућим вредностима полинома T_k у тачки $\mathbf{a}$.

Теорема 7.2. Нека је функција $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ диференцијабилна k пута. Тејлоров полином степена k функције f у околини тачке $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ се може записати као

$$T_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}d^2 f(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f(\mathbf{a}),$$

где је $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и где након развоја „диференцијала” замењујемо dx_i са $x_i - a_i$.
Тада је

$$f(\mathbf{x}) = T_k(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^k) \quad \text{кад} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0.$$

Тејлоров полином степена 2 функције $f(x, y)$ у околини тачке (a, b) је

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = \;& f(a,b) \\ & + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b) \\ & + \tfrac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2\right). \end{aligned}$$

Грешка која се јавља при апроксимацији полиномом степена k је

$$R_k(x,y) = f(x,y) - T_k(x,y) = \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)), \quad \theta \in (0,1).$$

Ако је $(a, b) = (0, 0)$, полином T_k називамо Маклореновим полиномом.

Пример 7.2. Одредити Маклоренов полином степена 2 за функцију $z(x, y) = \ln(y + e^x)$.

Тражени полином налазимо по формули

$$T_2(x,y) = z(0,0) + z'_x(0,0)\,x + z'_y(0,0)\,y + \frac{1}{2}\left(z''_{xx}(0,0)\,x^2 + 2z''_{xy}(0,0)\,xy + z''_{yy}(0,0)\,y^2\right).$$

Потребни парцијални изводи су

$$z'_x = \frac{e^x}{y+e^x}, \quad z'_y = \frac{1}{y+e^x}, \quad z''_{xx} = \frac{ye^x}{(y+e^x)^2}, \quad z''_{xy} = -\frac{e^x}{(y+e^x)^2}, \quad z''_{yy} = -\frac{1}{(y+e^x)^2},$$

па је $z(0,0) = 0$, $z'_x(0,0) = 1$, $z'_y(0,0) = 1$, $z''_{xx}(0,0) = 0$, $z''_{xy}(0,0) = -1$ и $z''_{yy}(0,0) = -1$. Дакле,

$$T_2(x,y) = x + y - xy - \frac{1}{2}y^2.$$

7.3 Локалне екстремне вредности

Нека је $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ диференцијабилна функција и $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ тачка из унутрашњости њеног домена. Тачке за које важи

$$f'_{x_1}(\mathbf{a}) = \cdots = f'_{x_n}(\mathbf{a}) = 0, \quad \text{тј.} \quad \nabla f(\mathbf{a}) = 0$$

се називају *стационарним тачкама.*

Ако је $f(x, y)$ функција по две променљиве, њене стационарне тачке су тачке у којима је тангентна раван хоризонтална.

Теорема 7.3. Тачка у којој функција f достиже локални екстремум може бити

(1°) њена стационарна тачка, или

(2°) тачка у којој функција f није диференцијабилна.

С друге стране, не мора свака стационарна тачка бити тачка екстремума - стационарне тачке које нису и тачке екстремума називамо *седластим тачкама.*

Нека је $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ је *стационарна тачка* двапут диференцијабилне функције $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тада у њеној околини важи

$$f(\mathbf{a} + \vec{dx}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{a}),$$

јер је $df(\mathbf{a}) = 0$, а сви остали чланови су $o(\|\vec{dx}\|^2)$.

Тако долазимо до критеријума за екстремне вредности:

(1°) ако је $d^2 f(\mathbf{a}) > 0$ за све $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ који нису сви нула, онда је $\mathbf{a}$ тачка *локалног минимума* функције f;

(2°) ако је $d^2 f(\mathbf{a}) < 0$ за све $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ који нису сви нула, онда је $\mathbf{a}$ тачка *локалног максимума* функције f;

(3°) ако $d^2 f(\mathbf{a})$ мења знак, тј. ако може бити и позитивно и негативно у зависности од избора $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, онда $\mathbf{a}$ *није* тачка локалног екстремума.

У случају (1°) кажемо да је квадратни полином $d^2 f$ *позитивно дефинитан*, а у случају (2°) *негативно дефинитан.* Критеријум за дефинитност полинома $d^2 f$ даје квадратна матрица других парцијалних извода

$$H_f = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n}, \end{bmatrix}$$

коју називамо *Хесијаном* функције f. Ако су други парцијални изводи непрекидни, тада су мешовити парцијални изводи једнаки, па је ова матрица симетрична.

Посматрајмо случај две променљиве. Ако је $f(x, y)$ двапут непрекидно диференцијабилна функција и $M(a, b)$ тачка у њеном домену, тада је

$$df^2(M) = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2, \quad \text{где су} \quad A = f''_{xx}(M),\ B = f''_{xy}(M) \text{ и } C = f''_{yy}(M).$$

Овај полином је увек позитиван ако и само ако је дискриминанта $4B^2 - 4AC = 4\Delta < 0$ и $A > 0$. Дакле, $d^2 f$ је позитивно дефинитан ако и само ако је $\Delta < 0$ и $A > 0$.

Теорема 7.4. Ако је $f = f(x, y)$ функција двеју променљивих и (a, b) је тачка локалног екстремума, онда је $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$. Притом, ако означимо

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b) \quad \text{и} \quad \Delta = B^2 - AC:$$

- ако је $\Delta < 0$ и $A > 0$, онда је (a, b) тачка *локалног минимума* функције f;
- ако је $\Delta < 0$ и $A < 0$, онда је (a, b) тачка *локалног максимума* функције f;
- ако је $\Delta > 0$, онда (a, b) није тачка локалног екстремума функције f;
- ако је $\Delta = 0$, потребно је испитати изводе вишег реда...

У случају двапут непрекидно диференцијабилне функције $f(x, y, z)$ три променљиве, знак другог диференцијала $d^2 f$ се утврђује помоћу *Силвестеровог критеријума*: посматрамо квадратне водеће подматрице Хесијана и рачунамо њихове детерминанте

$$\Delta_1 = |f''_{xx}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

Нека је M_0 стационарна тачка.

(1°) $d^2 f(M_0) > 0 \Leftrightarrow \Delta_1(M_0) > 0, \Delta_2(M_0) > 0, \Delta_3(M_0) > 0;$

(2°) $d^2 f(M_0) < 0 \Leftrightarrow \Delta_1(M_0) < 0, \Delta_2(M_0) > 0, \Delta_3(M_0) < 0.$

Пример 7.3. Одредити локалне екстремне вредности функције $u(x,y) = 4\ln x + 5\ln y + \ln(20-x-y)$.

Домен функције је $x>0, y>0, x+y<20$. Први парцијални изводи су

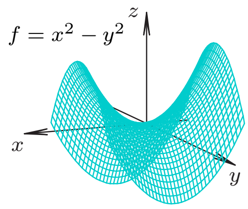
$$u'_x = \frac{4}{x} - \frac{1}{20-x-y} \quad \text{и} \quad u'_y = \frac{5}{y} - \frac{1}{20-x-y}.$$

Стационарне тачке су решења система $u'_x = 0, u'_y = 0$, па постоји једна стационарна тачка $M(8,10)$. Други парциајални изводи су

$$u''_{xx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{(20-x-y)^2}, \quad u''_{xy} = -\frac{1}{(20-x-y)^2} \quad \text{и} \quad u''_{yy} = -\frac{5}{y^2} - \frac{1}{(20-x-y)^2}.$$

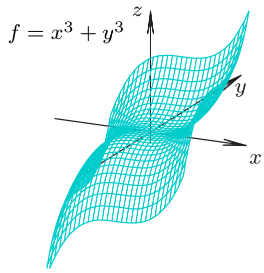
Даље је $A = u''_{xx}(M) = -\frac{5}{16}$, $B = u''_{xy}(M) = -\frac{1}{4}$, $C = u''_{yy}(M) = -\frac{3}{10}$, па је $\Delta = B^2 - AC = -\frac{1}{32} < 0$. Како је $A<0$, тачка M је тачка локалног максимума функције.

Пример 7.4. Посматрајмо функцију $f(x,y) = x^2 - y^2$ (хиперболички параболоид).



Њена једина стационарна тачка је $M(0,0)$. У тој тачки је $A = -C = 2$, $B = 0$ и $\Delta = 4 > 0$, па M није тачка локалног екстремума. Тачка M је локални максимум дуж једне криве на површи ($f(0,y)$), а локални минимум дуж друге ($f(x,0)$).

Пример 7.5. Посматрајмо функцију $f(x,y) = x^3 + y^3$.



Њена једина стационарна тачка је $M(0,0)$. У тој тачки је

$$df(M) = d^2 f(M) = 0,$$

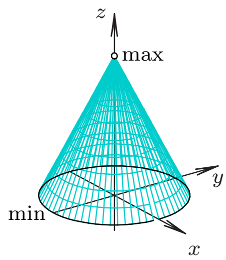
али M није тачка локалног екстремума јер

$$d^3 f(M) = 6(dx^3 + dy^3)$$

може да буде и позитивно и негативно.

У општем случају, екстремне вредности функције могу бити у рубним тачкама домена, или у тачкама где функција није диференцијабилна.

Пример 7.6. Посматрајмо конус $z(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ за $x^2+y^2 \leqslant 1$.



За $(x,y) = (0,0)$ се постиже глобални максимум функције, $z_{\max} = 1$, а свака тачка кружнице $x^2+y^2 = 1$ је глобални минимум, $z_{\min} = 0$. Како парцијални изводи

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

нису дефинисани за $(x,y) = (0,0)$, ова функција нема стационарних тачака.

7.4 Задаци

Пример 7.7. Наћи једначину тангентне равни на површ $z = \sqrt{41 - 4x^2 - y^2}$ у тачки $(2,3)$.

Једначина тражене тангентне равни је $z - z(2,3) = z'_x(2,3)(x-2) + z'_y(2,3)(y-3)$.

Видимо да је $z(2,3) = \sqrt{41 - 4\cdot 2^2 - 3^2} = 4$ и налазимо

$$z'_x = \frac{-4x}{z}, \quad z'_y = \frac{-y}{z},$$

па је $z'_x(2,3) = -2$ и $z'_y(2,3) = -\frac{3}{4}$. Тражена раван је

$$z - 4 = -2(x-2) - \frac{3}{4}(y-3), \quad \text{тј.} \quad 8x + 3y + 4z = 41.$$

Пример 7.8.

Површ $z = z(x,y)$ је дата имплицитно функцијом $F(x,y,z) = 2^{x/z} + 2^{y/z} - 8 = 0$. Наћи једначину тангентне равни на површ z у тачки $M(2,2,1)$.

Нормала на површ у тачки M је $\vec{n} = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$. Потребни парцијални изводи су

$$F'_x = 2^{x/z}\ln 2 \cdot \frac{1}{z}, \quad F'_y = 2^{y/z}\ln 2 \cdot \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad F'_z = 2^{x/z}\ln 2\left(-\frac{x}{z^2}\right) + 2^{y/z}\ln 2\left(-\frac{y}{z^2}\right),$$

па је $\vec{n} = 4\ln 2(1,1,-4)$ и можемо узети да је вектор нормале на раван $(1,1,-4)$. Једначина тражене равни је $x - 2 + y - 2 - 4(z-1) = 0$, тј. $x + y - 4z = 0$.

Пример 7.9. Наћи растојање од елипсоида $x^2+y^2+4z^2=4$ од равни $\alpha: x+y+z=6$.

Приметимо да је у тачки $M(x_0,y_0,z_0)$ на елипсоиду најближој датој равни нормала на елипсоид $\vec{n}=(2x_0,2y_0,8z_0)$ паралелна нормали на раван $\vec{n}_\alpha=(1,1,1)$. Дакле, $\frac{2x_0}{1}=\frac{2y_0}{1}=\frac{8z_0}{1}$, па је $x_0=y_0=4z_0$. Из услова да тачка M лежи на елипсоиду добијамо $(4z_0)^2+(4z_0)^2+4z_0^2=4$, тј. $z_0=\pm\frac{1}{3}$. Следи да имамо два кандидата $M_1(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ и $M_2(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$. Како је

$$d(M_1,\alpha)=\frac{\left|\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-6\right|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\quad\text{и}\quad d(M_2,\alpha)=\frac{\left|-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-6\right|}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3},$$

тражено растојање је $\sqrt{3}$.

Пример 7.10. Наћи једначину тангентне равни на параметарски дату површ $\vec{r}(u,v)=2u^3\vec{\imath}+uv^2\vec{\jmath}+2v\vec{k}$ која пролази кроз тачку $(2,1,2)$.

Приметимо да тачки $(2,1,2)$ одговара $(u,v)=(1,1)$. Нормала на површ је

$$\vec{n}=\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 6u^2 & v^2 & 0\\ 0 & 2uv & 2\end{vmatrix}=(2v^2,-12u^2,12u^3v),$$

па за $(u,v)=(1,1)$ имамо $\vec{n}=(2,-12,12)$. Једначина тражене равни је $2(x-2)-12(y-1)+12(z-2)=0$, тј. $x-6y+6z=8$.

Пример 7.11. Функцију $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{1+xy}$ апроксимирати Маклореновим полиномом другог степена.

Тражени полином налазимо по формули

$$T_2(x,y)=f(0,0)+f_x'(0,0)\,x+f_y'(0,0)\,y+\frac{1}{2}\left(f_{xx}''(0,0)\,x^2+2f_{xy}''(0,0)\,xy+f_{yy}''(0,0)\,y^2\right).$$

Потребни парцијални изводи су

$$\begin{aligned}
f_x'&=\frac{-\sin x(1+xy)-\cos\cdot y}{(1+xy)^2}=-\frac{\sin x}{1+xy}-\frac{y\cos x}{(1+xy)^2},\\
f_y'&=-\frac{x\cos x}{(1+xy)^2},\\
f_{xx}''&=-\frac{\cos x(1+xy)-\sin x\cdot y}{(1+xy)^2}-\frac{-y\sin x(1+xy)^2-y\cos x\cdot 2(1+xy)y}{(1+xy)^4}\\
&=-\frac{\cos x}{1+xy}+2\frac{y\sin x}{(1+xy)^2}+2\frac{y^2\cos x}{(1+xy)^3},\\
f_{xy}''&=\frac{x\sin x}{(1+xy)^2}-\frac{\cos x(1+xy)^2-y\cos x\cdot 2(1+xy)x}{(1+xy)^4}\\
&=\frac{x\sin x}{(1+xy)^2}-\frac{\cos x}{(1+xy)^2}+2\frac{xy\cos x}{(1+xy)^3},\\
f_{yy}''&=2\frac{x^2\cos x}{(1+xy)^3},
\end{aligned}$$

па је $f(0,0)=1$, $f_x'(0,0)=0$, $f_y'(0,0)=0$, $f_{xx}''(0,0)=-1$, $f_{xy}''(0,0)=-1$ и $f_{yy}''(0,0)=0$. Дакле,

$$T_2(x,y)=1-\frac{1}{2}x^2-xy.$$

Пример 7.12. Наћи Тејлоров полином степена 2 за функцију $z(x,y)$ дату формулом $z^3-2xz+y=0$ у околини тачке $(1,1)$, при чему је $z(1,1)=1$.

Диференцирајмо дату једначину по x:

$$3z^2z_x'-2z-2xz'=0,\quad\text{тј.}\quad z_x'=\frac{2z}{3z^2-2x}\quad(1).$$

Слично, диференцирањем по y добијамо

$$3z^2z_y'-2xz_y'+1=0,\quad\text{тј.}\quad z_y'=\frac{1}{2x-3z^2}\quad(2).$$

Диференцирајмо сада једначину (1) по x:

$$z_{xx}''=2\frac{z_x'(3z^2-2x)-z(6zz_x'-2)}{(3z^2-2x)^2}=2\frac{-3z^2z_x'-2xz_x'+2z}{(3z^2-2x)^2}.$$

Слично, диференцирањем једначина (1) и (2) по y добијамо

$$z''_{xy} = 2\frac{-3z'_y z^2 - 2xz'_y}{(3z^2-2x)^2} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{6zz'_y}{(3z^2-2x)^2}.$$

Заменом $(x,y) = (1,1)$ у једначине (1) и (2) добијамо $z'_x(1,1) = 2$ и $z'_y(1,1) = -1$, чијом даљом заменом у друге парцијалне изводе добијамо $z''_{xx}(1,1) = -16$, $z''_{xy}(1,1) = 10$ и $z''_{yy}(1,1) = -6$. Тражени Тејлоров полином је

$$\begin{aligned} T_2(x,y) =& z(1,1) + z'_x(1,1)(x-1) + z'_y(1,1)(y-1) \\ &+ \frac{1}{2}\left(z''_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2z''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + z''_{yy}(1,1)(y-1)^2\right) \\ =& 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2. \end{aligned}$$

Пример 7.13. Израчунати приближно $1,01^{1,98}$ помоћу развијања функције $z = x^y$ у Тејлоров полином другог степена у околи тачке $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Нека је $x = 1,01$, $y = 1,98$, $h = x - x_0 = 1,01 - 1 = 0,01$ и $k = y - y_0 = 1,98 - 2 = -0,02$. Одговарајући Тејлоров полином је

$$\begin{aligned} T_2(x,y) =& z(1,2) + z'_x(1,2)(x-1) + z'_y(1,2)(y-2) \\ &+ \frac{1}{2}\left(z''_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2z''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + z''_{yy}(1,2)(y-2)^2\right). \end{aligned}$$

Налазимо $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$, $z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$, $z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$ и $z''_{yy} = x^y \ln^2 x$. Следи да је $z(1,2) = 1$, $z'_x(1,2) = 2$, $z'_y(1,2) = 0$, $z''_{xx}(1,2) = 2$, $z''_{xy}(1,2) = 1$ и $z''_{yy}(1,2) = 0$. Дакле,

$$\begin{aligned} T_2(1,2) &= 1 + 2\cdot 0,01 + 0\cdot(-0,02) + \frac{1}{2}\left(2\cdot 0,01^2 + 2\cdot 1\cdot 0,01\cdot(-0,02) + 0\cdot(-0,02)^2\right) \\ &= 1 + 0,02 + 0,0001 - 0,0002 = 1,0199. \end{aligned}$$

Пример 7.14. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Прво налазимо парцијалне изводе $z'_x = 4x^3 - 4y$ и $z'_y = 4y^3 - 4x$. Стационарне тачке налазимо као решења система $z'_x = 0, z'_y = 0$, тј. $x^3 = y, y^3 = x$. Следи да је $y = y^9$, тј. $y(y^8 - 1) = 0$. Одавде је $y = 0$ или $y = \pm 1$, а заменом ових вредности у једначину $x = y^3$ добијамо стационарне тачке $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ и $M_3(-1,-1)$. Даље налазимо друге парцијалне изводе $z''_{xx} = 12x^2$, $z''_{xy} = -4$ и $z''_{yy} = 12y^2$. У тачки M_1 је $A = z''_{xx}(0,0) = 0$, $B = z''_{xy}(0,0) = -4$, $C = z''_{yy}(0,0) = 0$ и $\Delta = B^2 - 4AC = 16 > 0$, па у тачки M_1 функција нема екстремну вредност. За тачке M_2 и M_3 важи $A = C = 12$, $B = -4$ и $\Delta = -128 < 0$, па како је $A > 0$, тачке M_2 и M_3 су локални минимуми функције, $z_{\min} = -2$.

Пример 7.15. Наћи локалне екстремне вредности функције $z(x,y) = -\frac{x}{y} + \frac{1}{8x^2} + 2y^2$.

Домен функције је $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Парцијални изводи су $z'_x = -\frac{1}{y} - \frac{1}{4x^3}$ и $z'_y = \frac{x}{y^2} + 4y$. Стационарне тачке су решења система $z'_x = z'_y = 0$, тј. $y = -4x^3, x = -4y^3$. Следи да је $y = 4^4 y^9$, тј. $1 = (2y)^8$. Дакле, $y = \pm\frac{1}{2}$ и $x = \mp\frac{1}{2}$, па имамо две стационарне тачке $M_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $M_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Други парцијални изводи су $z''_{xx} = \frac{3}{4x^4}$, $z''_{xy} = \frac{1}{y^2}$ и $z''_{yy} = 4 - \frac{2x}{y^3}$ па је за обе тачке $A = C = 12$, $B = 4$ и $\Delta = B^2 - 4AC = -128 < 0$. Следи да у тачкама M_1 и M_2 дата функција постиже локални минимум, $z_{\min} = 2$.

Пример 7.16. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x,y) = \frac{1}{xy} + \ln(x+y)^2$.

Област дефинисаности функције је $xy \neq 0, x + y \neq 0$. Први парцијални изводи су

$$z'_x = -\frac{1}{x^2 y} + \frac{2}{x+y} \quad \text{и} \quad z'_y = -\frac{1}{xy^2} + \frac{2}{x+y}.$$

Стационарне тачке су $M_1(1,1)$ и $M_2(-1,-1)$. Други парциајални изводи су

$$z''_{xx} = \frac{2}{x^3 y} - \frac{2}{(x+y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{1}{x^2y^2} - \frac{2}{(x+y)^2} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{2}{xy^3} - \frac{2}{(x+y)^2}.$$

Даље је $A(M_1) = A(M_2) = \frac{3}{2}$, $B(M_1) = B(M_2) = \frac{1}{2}$, $C(M_1) = C(M_2) = \frac{3}{2}$, па је $\Delta(M_1) = \Delta(M_2) = B^2 - AC = -2 < 0$. Како је $A > 0$, у тачкама M_1 и M_2 функција има локални максимум, $z_{\min} = 1 + \ln 4$.

Пример 7.17. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{-2x-2y}$.

Диференцирањем функције $z(x,y)$ по x и y добијамо:

$$z'_x = 2(x - x^2 + 2y^2)e^{-2x-2y}, \quad z'_y = 2(-2y - x^2 + 2y^2)e^{-2x-2y}.$$

Решавањем система $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ налазимо да функција има две стационарне тачке: $M_1(0,0)$ и $M_2(2,-1)$. Треба проверити да ли је у тим тачкама локални екстремум, па налазимо друге парцијалне изводе:

$$z''_{xx} = 2(1 - 4x + 2x^2 - 4y^2)e^{-2x-2y},$$
$$z''_{xy} = 2(-2x + 4y + 2x^2 - 4y^2)e^{-2x-2y},$$
$$z''_{yy} = 2(-2 + 8y + 2x^2 - 4y^2)e^{-2x-2y}.$$

У тачки M_1 је $A = z''_{xx} = 2$, $B = z''_{xy} = 0$ и $C = z''_{yy} = -4$, па је $\Delta = B^2 - AC = -8 > 0$ и ту функција нема екстремум.

У тачки M_2 је $A = -\frac{6}{e^2}$, $B = -\frac{8}{e^2}$ и $C = -\frac{12}{e^2}$, па је $\Delta = -\frac{8}{e^4} < 0$ и како је $A < 0$, M_2 је тачка локалног максимума, $z(M_2) = \frac{2}{e^2}$.

Пример 7.18. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x,y) = xye^{1-x^2-y^2}$.

Први парцијални изводи су

$$z'_x = -y(2x^2-1)e^{1-x^2-y^2}, \quad z'_y = -x(2y^2-1)e^{1-x^2-y^2}.$$

Решавањем система $z'_x = z'_y = 0$ налазимо да функција има пет стационарних тачака: $M_1(0,0)$, $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_4(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $M_5(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Други парцијални изводи су

$$z''_{xx} = 2xy(2x^2-3)e^{1-x^2-y^2}, \quad z''_{xy} = (2x^2-1)(2y^2-1)e^{1-x^2-y^2}, \quad z''_{yy} = 2xy(2y^2-3)e^{1-x^2-y^2}.$$

За тачку M_1 је $A = C = 0$ и $B = e$, па је $\Delta = e^2 > 0$ и тачка M_1 није тачка екстремума. За остале стационарне тачке се на исти начин добија да су M_2 и M_4 тачке локалног минимума ($z_{\min} = -\frac{1}{2}$), а тачке M_3 и M_5 тачке локалног максимума ($z_{\max} = \frac{1}{2}$).

Пример 7.19. Наћи стационарне тачке функције $z(x,y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{8}{x-y}$.

Парцијални изводи су $z'_x = y + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{(x-y)^2}$ и $z'_y = x - \frac{1}{y^2} + \frac{8}{(x-y)^2}$. Стационарне тачке налазимо решавањем система $z'_x = 0$, $z'_y = 0$. Одузимањем друге од прве једначине добијамо $x+y+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2} = 0$, одакле је $x+y = 0$ или $x - y = x^2y^2$. Заменом првог услова у, рецимо, једначину $z'_x = 0$ једноставно добијамо стационарну тачку $M_1(-1,1)$. Други услов захтева мало сналажења:

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2y+1}{x^2} = \frac{8}{(x-y)^2} \\ \frac{xy^2-1}{y^2} = \frac{-8}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2(x^2y+1) = 8x^2 \\ (x-y)^2(1-xy^2) = 8y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2(xy+\frac{1}{x}) = 8x \\ (x-y)^2(\frac{1}{y}-xy) = 8y. \end{cases}$$

Сабирањем претходне две једначине добијамо $(x-y)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 8(x+y)$, тј. $(x-y)^2 = 8xy$, који нам заједно са условом $x - y = x^2y^2$ даје систем $xy = 2$, $x - y = 4$. Решења овог система су стационарне тачке $M_2(2+\sqrt{6}, -2+\sqrt{6})$ и $M_3(2-\sqrt{6}, -2-\sqrt{6})$.

Пример 7.20. Наћи локалне екстремне вредности функције $u = 2x^2 + \frac{y^2}{x} - 4z + \frac{2z^2}{y}$.

Први парцијални изводи су

$$u'_x = 4x - \frac{y^2}{x^2}, \quad u'_y = \frac{2y}{x} - \frac{2z^2}{y^2}, \quad u'_z = -4 + \frac{4z}{y},$$

а решење система $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ је стационарна тачка $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Други парцијални изводи су

$$u''_{xx} = 4 + \frac{2y^2}{x^3}, \quad u''_{xy} = -\frac{2y}{x^2}, \quad u''_{xz} = 0, \quad u''_{yy} = \frac{2}{x} + \frac{4z^2}{y^3}, \quad u''_{yz} = -\frac{4z}{y}, \quad u''_{zz} = \frac{4}{y}.$$

Даље је

$$\Delta_1(M){=}12 > 0, \quad \Delta_2(M){=}\begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 24 \end{vmatrix} = 224 > 0, \quad \Delta_3(M){=}\begin{vmatrix} 12 & -8 & 0 \\ -8 & 24 & -16 \\ 0 & -16 & 16 \end{vmatrix} = 512 > 0,$$

па је у тачки $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ функција u постиже локални минимум, $u_{\min} = -\frac{1}{8}$.