Машински факултет, Београд

Други колоквијум из Математике 2

Пример 1

1. Наћи први диференцијал фукнције $u(x,y,z) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
2. Наћи локалне екстремне вредности функције $f(x,y) = (y^2-x^2)e^{2x+y}$.
3. Наћи решење диференцијалне једначине $(\sin y + x \operatorname{tg} y)y' = 1$ које задовољава услов $y(1) = 0$.
4. Наћи опште решење диференцијалне једначине $2x\sqrt{y^2-x^2}dx - (1+2y\sqrt{y^2-x^2})dy = 0$.

Решења.

1. $$u'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}}}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}\right) = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2}}\frac{y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2},$$

$$u'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right) = \frac{-xy}{\sqrt{y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)},$$

$$u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)} \quad \text{(по симетрији)}.$$

Први диференцијал је

$$\mathrm{d}u = \frac{(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y - xz\,\mathrm{d}z}{\sqrt{y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

2. Парцијални изводи су

$$f'_x = (-2x+2y^2-2x^2)e^{2x+y}, \qquad f'_y = (2y+y^2-x^2)e^{2x+y},$$

$$f''_{xx} = -2(2x^2-2y^2+4x+1)e^{2x+y}, \quad f''_{xy} = 2(-x^2+y^2-x+2y)e^{2x+y}, \quad f''_{yy} = (-x^2+y^2+4y+2)e^{2x+y}.$$

Решавањем система $f'_x = f'_y = 0$ добијамо стационарне тачке $M_1(0,0)$ и $M_2(-\frac{4}{3},\frac{2}{3})$. У тачки M_1 је $A = f''_{xx} = -2$, $B = f''_{xy} = 0$, $C = f''_{yy} = 2$ и $\Delta = B^2-4AC = 4$, па тачка M_1 није тачка локалне екстремне вредности; у тачки M_2 је $A = \frac{10}{3e^2}$, $B = \frac{8}{3e^2}$, $C = \frac{10}{3e^2}$ и $\Delta = -\frac{4}{e^4}$, па је тачка M_2 локални минимум функције, $z_{\min} = -\frac{4}{3e^2}$.

3. Користимо да је $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x'}$, па је дата једначина еквивалентна линеарној једначини $x' - x\operatorname{tg} y = \sin y$. Опште решење је

$$x(y) = e^{-\int p(y)\,\mathrm{d}y}\left(C + \int q(y)e^{\int p(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right), \quad \text{где је} \quad p(y) = -\operatorname{tg}\,y \quad \text{и} \quad q(y) = \sin y.$$

Како је $\displaystyle\int p(y)\,\mathrm{d}y = -\int \operatorname{tg}\,y\,\mathrm{d}y = \ln|\cos y| + C$, добијамо

$$x(y) = \frac{1}{\cos y}\left(C + \int \sin y\cos y\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{\cos y}\left(C - \int \cos y\,\mathrm{d}(\cos y)\right) = \frac{C}{\cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

Партикуларно решење налазимо из услова $1 = \frac{C}{\cos 0} - \frac{\cos 0}{2}$, па је $C = \frac{3}{2}$ и тражено решење је

$$x = \frac{3}{2\cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

4. Нека је $M = M(x,y) = 2x\sqrt{y^2-x^2}$ и $N = N(x,y) = -1-2y\sqrt{y^2-x^2}$. Како је $M'_y = N'_x = \frac{2xy}{\sqrt{y^2-x^2}}$, дата једначина је са тоталним диференцијалом. Опште решење је

$$u = \int 2x\sqrt{y^2-x^2}\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = -\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \varphi(y),$$

где је $u'_y = N$, тј. $-1-2y\sqrt{y^2-x^2} = -2y\sqrt{y^2-x^2} + \varphi'(y)$. Дакле, $\varphi'(y) = -1$ и $\varphi(y) = -y + C$, па је опште решење

$$u = -\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - y + C.$$

Други колоквијум из Математике 2

Пример 2

1. Површ $z = z(x, y)$ је дата имплицитно функцијом $F(x, y, z) = 2^{x/z} + 2^{y/z} - 8 = 0$. Наћи једначину тангентне равни на површ z у тачки $M(2, 2, 1)$.
2. Наћи локалне екстремне вредности функције $z(x, y) = -\frac{x}{y} + \frac{1}{8x^2} + 2y^2$.
3. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
4. Одредити изогоналну трајекторију под углом $\alpha = 45°$ за фамилију кривих $y = C/x$ која пролази кроз тачку $(1, 3)$.

Решења.

1. Нормала на површ у тачки M је $\vec{n} = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$. Потребни парцијални изводи су

$$F'_x = 2^{x/z} \ln 2 \cdot \frac{1}{z}, \quad F'_y = 2^{y/z} \ln 2 \cdot \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad F'_z = 2^{x/z} \ln 2 \left(-\frac{x}{z^2}\right) + 2^{y/z} \ln 2 \left(-\frac{y}{z^2}\right),$$

па је $\vec{n} = 4 \ln 2(1, 1, -4)$ и можемо узети да је вектор нормале на раван $(1, 1, -4)$. Једначина тражене равни је $x - 2 + y - 2 - 4(z - 1) = 0$, тј. $x + y - 4z = 0$.

2. Домен функције је $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Парцијални изводи су $z'_x = -\frac{1}{y} - \frac{1}{4x^3}$ и $z'_y = \frac{x}{y^2} + 4y$. Стационарне тачке су решења система $z'_x = z'_y = 0$, тј. $y = -4x^3, x = -4y^3$. Следи да је $y = 4^4 y^9$, тј. $1 = (2y)^8$. Дакле, $y = \pm\frac{1}{2}$ и $x = \mp\frac{1}{2}$, па имамо две стационарне тачке $M_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $M_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Други парцијални изводи су $z''_{xx} = \frac{3}{4x^4}$, $z''_{xy} = \frac{1}{y^2}$ и $z''_{yy} = 4 - \frac{2x}{y^3}$ па је за обе тачке $A = C = 12$, $B = 4$ и $\Delta = B^2 - 4AC = -128 < 0$. Следи да у тачкама M_1 и M_2 дата функција постиже локални минимум, $z_{\min} = 2$.

3. Дата једначина је еквивалентна једначини $x' = \frac{x^2+y^2}{x}$, тј. $x' - x = \frac{y^2}{x}$, што је Бернулијева једначина, $x = x(y)$. Множењем те једначине са x и увођењем смене $x^2 = z$, $2xx' = z'$ сводимо је на линеарну једначину $z' - 2z = 2y^2$. Опште решење је

$$z = e^{\int 2\,\mathrm{d}y} \left(C + \int 2y^2 e^{-\int 2\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) = e^{2y} \left(C + \int 2y^2 e^{-2y}\,\mathrm{d}y\right),$$

$$\begin{aligned}\int 2y^2 e^{-2y}\,\mathrm{d}y &= \begin{bmatrix} u = 2y^2, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 4y\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix} = -y^2 e^{-2y} + \int 2y e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} u = 2y, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix} \\ &= -y^2 e^{-2y} - y e^{-2y} - e^{-2y}/2 + C.\end{aligned}$$

Дакле, опште решење је

$$x^2 = Ce^{2y} - \frac{1}{2}\left(2y^2 + 2y + 1\right).$$

4. Диференцијалну једначину дате фамилије добијамо диференцирајући једначину $xy = C$: $y + xy' = 0$. Диференцијална једначина изогоналних трајеторија које секу дату фамилију под углом $45°$ добијамо заменом y' са $\frac{y' - \operatorname{tg} 45°}{1 + y' \operatorname{tg} 45°} = \frac{y'-1}{y'+1}$:

$$y + x\frac{y' - 1}{y' + 1} = 0, \quad \text{тј.} \quad y' = \frac{y - x}{y + x},$$

што је хомогена диференцијална једначина. Решавамо је сменом $\frac{y}{x} = z$, $y' = z'x + z$ и добијамо једначину са раздвојеним промењљивим

$$\frac{z + 1}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{чије је опште решње} \quad \ln\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\ln x + C.$$

Ако заменимо $(x, y) = (1, 3)$ у претходну једначину добијамо $C = \ln\sqrt{10} + \operatorname{arctg} 3$ - па се тражена изогонална трајекторија добија за ту вредности константе C из општег решења.

Други колоквијум из Математике 2

Пример 3

1. Доказати да функција $z = e^x f\left(xe^{\frac{y^2}{2x^2}}\right)$ задовољава једначину $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y^2 - x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$.
2. Наћи Тејлоров полином степена 2 за функцију $z(x, y)$ дату формулом $z^3 - 2xz + y = 0$ у околини тачке $(1, 1)$, при чему је $z(1, 1) = 1$.
3. Решити диференцијалну једначину $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$.
4. Наћи интеграциони фактор једначине $(x - \cos y)\,\mathrm{d}x - \sin y\,\mathrm{d}y = 0$, ако је познато да је он облика $\mu(x, y) = \lambda(x)$. Уз помоћ њега решити дату једначину.

Решења.

1. Нека је $t = xe^{\frac{y^2}{2x^2}}$. Тада је

$$z'_x = e^x f(t) + e^x f'(t)\left(e^{\frac{y^2}{2x^2}} + xe^{\frac{y^2}{2x^2}}\left(-\frac{y^2}{x^3}\right)\right) = e^x f(t) + \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t)$$

$$z'_y = e^x f'(t) \cdot xe^{\frac{y^2}{2x^2}} \frac{2y}{2x^2} = \frac{y}{x} e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t).$$

Дакле,

$$xyz'_x + (y^2 - x^2)z'_y = xye^x f(t) + xy\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t) + (y^2 - x^2)\frac{y}{x} e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t) = xyz.$$

2. Диференцирајмо дату једначину по x:

$$3z^2 z'_x - 2z - 2xz' = 0, \quad \text{тј.} \quad z'_x = \frac{2z}{3z^2 - 2x} \quad (1).$$

Слично, диференцирањем по y добијамо

$$3z^2 z'_y - 2xz'_y + 1 = 0, \quad \text{тј.} \quad z'_y = \frac{1}{2x - 3z^2} \quad (2).$$

Диференцирајмо сада једначину (1) по x:

$$z''_{xx} = 2\frac{z'_x(3z^2 - 2x) - z(6zz'_x - 2)}{(3z^2 - 2x)^2} = 2\frac{-3z^2 z'_x - 2xz'_x + 2z}{(3z^2 - 2x)^2}.$$

Слично, диференцирањем једначина (1) и (2) по y добијамо

$$z''_{xy} = 2\frac{-3z'_y z^2 - 2xzz'_y}{(3z^2 - 2x)^2} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{6zz'_y}{(3z^2 - 2x)^2}.$$

Заменом $(x, y) = (1, 1)$ у једначине (1) и (2) добијамо $z'_x(1, 1) = 2$ и $z'_y(1, 1) = -1$, чијом даљом заменом у друге парцијалне изводе добијамо $z''_{xx}(1, 1) = -16$, $z''_{xy}(1, 1) = 10$ и $z''_{yy}(1, 1) = -6$. Тражени Тејлоров полином је

$$\begin{aligned} T_2(x, y) =& z(1, 1) + z'_x(1, 1)(x - 1) + z'_y(1, 1)(y - 1) \\ &+ \frac{1}{2}\left(z''_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2z''_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + z''_{yy}(1, 1)(y - 1)^2\right) \\ =& 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2. \end{aligned}$$

3. Очигледно је у питању линеарна диференцијална једначина, $y' - (\operatorname{ctg} x)y = -\frac{1}{\sin x}$. Прво налазимо $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$, па је опште решење дате једначине

$$y = e^{\ln \sin x}\left(C - \int \frac{1}{\sin x} e^{-\ln \sin x}\,\mathrm{d}x\right) = \sin x\left(C - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\right) = \sin x\,(C + \operatorname{ctg} x) = C \sin x + \cos x.$$

4. Нека је $M = M(x, y) = x - \cos y$ и $N = N(x, y) = -\sin y$. Дата једначина није потпуни диференцијал, јер је $M'_y = \sin y \neq N'_x = -\cos y$. Тражимо функцију $\lambda = \lambda(x)$ за коју важи $(\lambda(x) \cdot M)'_y = (\lambda(x) \cdot N)'_x$, тј.
$(\lambda(x) \cdot (x - \cos y))'_y = (\lambda(x) \cdot (-\sin y))'_x$, одакле добијамо диференцијалну једначину $\dfrac{\mathrm{d}\lambda(x)}{\mathrm{d}x} = -\,\mathrm{d}x$, чије је опште решење $\lambda(x) = Ce^{-x}$. Дакле, можемо узети да је интеграциони фактор $\lambda(x) = e^{-x}$.

Једначина $e^{-x}(x - \cos y)\,\mathrm{d}x - e^{-x} \sin y\,\mathrm{d}y = 0$ јесте једначина са тотланим диференцијалом, јер је $M'_y = (e^{-x}(x - \cos y))'_y = e^{-x} \sin y = N'_x = (-e^{-x} \sin y)'_x$. Опште решење тражимо у облику

$$u(x, y) = \int M dx + \varphi(y) = \int e^{-x}(x - \cos y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = e^{-x}(\cos y - x - 1) + \varphi(y).$$

Даље је $u'_y = N = -e^{-x} \sin y = -e^{-x} \sin y + \varphi'(y)$, одакле је $\varphi(y) = C$. Дакле,

$$u(x, y) = e^{-x}(\cos y - x - 1) + C.$$

Рада Мутавџић Ђукић