Диференцијалне једначине 1. реда (додатак предавањима и вежбама)

Једначине задате у наредном задатку се решавају тако сто се прво презапишу облику

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{1}$$

Ако ово није једначина са тоталним диференцијалом, тражимо функцију $\lambda(x,y)$ такву да након множења ове једначине са $\lambda(x,y)$ - добијемо једначину са тоталним диференцијалом, односно да

$$\lambda\left(x,y\right)P\left(x,y\right)dx + \lambda\left(x,y\right)Q\left(x,y\right)dy = 0$$

буде једначина у облику тоталног диференцијала. Таква функција се зове интеграциони фактор или интеграциони множилац. Услов за то је

$$\frac{\partial\left(\lambda P\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\lambda Q\right)}{\partial x}$$

или, у развијеном облику,

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x},$$

односно

$$P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\lambda = 0. \tag{2}$$

Значи, ако је функција λ интеграциони множилац диференцијалне једначине (1), тада та функција задовољава једначину (2). Може се показати да важи и обрнуто. Тиме се проблем решавања једначине (1) своди на решавање једначине (2). Међутим, у општем случају теже је решити једначину (2) него једначину (1). Зато се најчешће поступа тако што се покушава одредити функција λ у неком специјалном облику, на пример, $\lambda = \lambda\left(x\right)$, $\lambda = \lambda\left(y\right)$ или $\lambda = \lambda\left(xy\right)$.

Потражимо интеграциони множилац у облику $\lambda = \lambda\left(\mu\right)$, где је $\mu = \mu\left(x,y\right)$ позната функција. С обзиром на то да је

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{d\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{d\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

(λ је функција само једног аргумента μ и стога извод *lambda* по μ заправо обичан извод функције једне промењливе по тој промењливој), једначина (2) тако постаје

$$\left(P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\frac{d\lambda}{d\mu} + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\lambda\left(\mu\right)\right] = 0$$

или

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu}=\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial \mu}{\partial y}-Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x}}. \tag{3}$$

Ако се функција на десној страни једначине (3) такође може приказати као функција променљиве μ, то јест, ако је

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P\dfrac{\partial \mu}{\partial y}-Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x}}=G\left(\mu\right),$$

онда једначина (3) представља обичну диференцијалну једначину првог реда у односу на непознату функцију $\lambda=\lambda\left(\mu\right)$, која раздваја променљиве и чији је облик

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=G\left(\mu\right)d\mu.$$

Једно решење те једначине је функција $\lambda\left(\mu\right)=e^{\int G(\mu)d\mu}$.

Специјално, диференцијална једначина (1) има интеграциони фактор који зависи само од променљиве x $\left(\mu\left(x,y\right)=x\right)$, односно само од променљиве y $\left(\mu\left(x,y\right)=y\right)$, ако постоји функција G једне независно променљиве, таква да важи једнакост

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=G\left(x\right),$$

(тј. да ово последње зависи само од x и тада је $\lambda\left(x\right)=e^{\int G(x)dx}$), односно таква да важи једнакост

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P}=G\left(y\right),$$

(тј. да ово последње зависи само од y и тада је $\lambda\left(y\right)=e^{\int G(y)dy}$).

Исто тако, једначина (1) има интеграциони фактор
$\mu(x,y)=x+y$, ако и само ако је

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q-P}=G(x+y),$$

тј. да ово последње зависи само од $x+y$ и тада је множимо одговарајућим изразом облика $\lambda = \lambda(x+y)$;

$\mu(x,y) = xy$, ако и само ако је

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} = G(xy),$$

тј. ако ово последње зависи само од xy и тада је множимо одговарајућим изразом облика $\lambda = \lambda(xy)$;

$\mu(x,y) = x^2 + y^2$, ако и само ако је

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{2xQ - 2yP} = G(x^2+y^2),$$

тј. ако ово последње зависи само од x^2+y^2 и тада је множимо одговарајућим изразом облика $\lambda = \lambda(x^2+y^2)$.

1. Наћи опште решење следећих диференцијалних једначина:

   (а) $3x^2y\,dx + (y^4 - x^3)\,dy = 0$;

   (б) $(2x^2y + x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$;

   (ц) $y[(x+y)^3 + x^3]y' + x[(x+y)^3 + y^3] = 0$;

2. Наћи опште решење једначине

$$y(x^2 - y^2 + 1)\,dx - x(x^2 - y^2 - 1)\,dy = 0$$

   ако је познато да она има интеграциони фактор облика $\mu = \mu(x^2+y^2)$.

Решења

1. (а) Пробавањем неколико карактеристичних случајева брзо проналазимо да дата DJ има интеграциони фактор који зависи само од y ($\mu(x,y) = y$), одакле добијамо да је треба помножити са $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$. Опште решење новодобијене једначине са тоталним диференцијалом је

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{3} = C.$$

   (б) Пробавањем неколико карактеристичних случајева брзо проналазимо да дата DJ има интеграциони фактор који зависи само од xy ($\mu(x,y) = xy$), одакле добијамо да је треба помножити са $\lambda(x,y) = (xy)^{-3} = \dfrac{1}{x^3y^3}$. Опште решење новодобијене једначине са тоталним диференцијалом је

$$2\ln|x| + \frac{4}{xy} + \frac{1}{x^2y^2} = C.$$

(ц) Пробавањем неколико карактеристичних случајева брзо проналазимо да дата DJ има интеграциони фактор који зависи само од $x+y$ ($\mu(x,y) = x+y$), одакле добијамо да је треба помножити са $\lambda(x,y) = (x+y)^{-3} = \dfrac{1}{(x+y)^3}$. Опште решење новодобијене једначине са тоталним диференцијалом је

$$x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{(x+y)^2} = C.$$

2. Добија се да дату једначину треба помножити са $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{\left(x^2+y^2-1\right)^2}$. Опште решење новодобијене једначине са тоталним диференцијалом је

$$\frac{xy}{x^2+y^2-1} = C.$$

Александар Пејчев,

Машински факултет у Београду