Матрице

Математика 1 - лекција 2

Душан Ђукић

1. Одредити A^{20}, ако је $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

   Решење. Имамо

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^6 = A^3 \cdot A^3 = E.$$

   Следи да је $A^{20} = A^{18} \cdot A^2 = E^3 \cdot A^2 = A^2$, што смо већ израчунали.

2. Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

   Решење. Као и обично, V_i означава i-ту врсту, а $v_i + kv_j$ операцију додавања j-те врсте помножене са k i-тој врсти. Имамо

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{V_1 - 2V_3 \\ V_4 + 2V_3}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 76 - 45 + 2 = 33.$$

3. Наћи инверз матрице $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$.

   Решење. Како је $A_{11} = 11$, $A_{12} = -7$, $A_{21} = -8$, $A_{22} = 5$ и $\det A = 5 \cdot 11 - 7 \cdot 8 = -1$, формула $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ даје $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$.

4. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Наћи A^{-1}.

   Решење. Користимо формулу $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. Притом је $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, за

$$\begin{array}{lll} A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -12, & A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7, & A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3, \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, & A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, & A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8, & A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -2, & A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \end{array}$$

   и $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-12) + (-1)(-4) + 2 \cdot 8 = 8$, па је

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -12 & 7 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Није лоше проверити: $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 & 7 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Решити матричну једначину $AX + B = A + 2X$ ако су дате матрице

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решење. Дату једначину можемо написати као $AX - 2X = A - B$, тј. $(A-2I)X = A - B$, одакле множењем са $(A-2I)^{-1}$ са леве стране добијамо $X = (A-2I)^{-1}(A-B)$.

Пронађимо $(A-2I)^{-1} = C^{-1}$, где је $C = A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Имамо

$$\begin{array}{lll} C_{11} = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 1, & C_{21} = -\left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = -2, & C_{31} = \left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right| = 1, \\ C_{12} = -\left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 0, & C_{22} = \left|\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 1, & C_{32} = -\left|\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right| = -2, \\ C_{13} = \left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -1, & C_{23} = -\left|\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 2, & C_{33} = \left|\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 0, \end{array}$$

и $\det C = c_{11}C_{11} + c_{12}C_{12} + c_{13}C_{13} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3(-1) = 1$, па је $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Најзад, $X = C^{-1}(A-B) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

6. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Решити матричну једначину $X(X+I)^{-1} = A$.

Решење. Множењем са $X + I$ с десне стране добијамо $X = A(X+I) = AX + A$, тј. $(I-A)X = A$, па је $X = (I-A)^{-1}A$. Означимо $B = I - A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Имамо

$$\begin{array}{lll} B_{11} = \left|\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right| = 0, & B_{21} = -\left|\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right| = -4, & B_{31} = \left|\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 0, \\ B_{12} = -\left|\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix}\right| = -4, & B_{22} = \left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix}\right| = 4, & B_{32} = -\left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -2, \\ B_{13} = \left|\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{smallmatrix}\right| = -4, & B_{23} = -\left|\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 2 \end{smallmatrix}\right| = 12, & B_{33} = \left|\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -6, \end{array}$$

и $\det B = b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13} = 0 \cdot 0 + (-3)(-4) + 1(-4) = 8$, па је $B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 12 & -6 \end{bmatrix}$

и $X = B^{-1}A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 12 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$.

7. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Наћи регуларну матрицу X такву да је $XA + A(A+X)^{-1} = I$.

Решење. Множење са $A+X$ с десне стране даје $XA(A+X) + A = A + X$, тј. $XA^2 + XAX = X$. Пошто је матрица X регуларна, можемо да скратимо X слева: $A^2 + AX = I$, тако да је $AX = (I - A^2)$ и $X = A^{-1}(I - A^2) = A^{-1} - A$. У овом случају добијамо

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $\det X = -8$, матрица X јесте регуларна.

8. Наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Решење. Елементарним трансформацијама добијамо

$$\operatorname{rang} A \;\underset{\substack{V_3 - 2V_1 \\ V_4 - V_1}}{=\!=\!=\!=}\; \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \;\overset{V_2 \leftrightarrow V_4}{\underset{\substack{V_3 - V_2 \\ V_4 - 2V_2}}{=\!=\!=\!=}}\; \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{V_4 + V_3}{\underset{-\frac{1}{3}V_3}{=\!=\!=\!=}}\; \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

9. У зависности од параметра a наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -a & 2-a & 1-2a & -1+4a \\ 2 & a-1 & 4-a & 3-4a & -2+4a \end{bmatrix}$.

Решење. Елементарним трансформацијама добијамо

$$A \xrightarrow[V_3-2V_1]{V_2-V_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1-a & -a & 1-2a & 4a \\ 0 & a-3 & -a & 3-4a & 4a \end{bmatrix} \xrightarrow{K_2 \leftrightarrow K_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -a & -1-a & 1-2a & 4a \\ 0 & -a & a-3 & 3-4a & 4a \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{K_3-K_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -a & -1-a & 1-2a & 4a \\ 0 & 0 & 2a-2 & 2-2a & 0 \end{bmatrix}.$$

За $a \notin \{0,1\}$ добијена матрица је квази-троугаона са свим врстама различитим од 0 и тада је ранг 3. За $a=1$ је $K_3 = 0 \neq K_2$, па је ранг 2, док је за $a=0$ $K_2 = K_3 \neq 0$ и тада је опет ранг једнак 2.

10. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   а) Одредити вредност параметра a за коју матрица $A-B$ има најмањи ранг.

   б) За $a=2$ решити матричну једначину $AX=B$.

Решење. Овде је $\det(A-B) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & a-1 \end{vmatrix} \overset{\overline{\overline{\quad\quad}}}{\underset{V_3+\frac{1}{2}V_1}{\underset{V_2+V_1}{=\!=}}} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} =$ $2(a-9)$, па $A-B$ има ранг 3 за $a \neq 9$. За $a=9$ ранг је 2.

За $a=2$, решење једначине $AX=B$ је $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -14 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 12 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Задаци за вежбу

11. Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

12. Одредити инверз матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

13. Одредити инверз матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

14. Одредити инверз матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решити матричне једначине 15-17:

15. $XA = B - 3X$, где је $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

16. $AX^{-1} = B(X+E)^{-1}$, где је $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

17. $A(X+B)=2X+B$, где је $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}$.

18. Наћи ранг матрице $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

19. За које a и b је ранг матрице $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & a \\ -1 & b & 4 & a \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ једнак 2?

20. У зависности од параметра a одредити ранг матрице $A=\begin{bmatrix} 3-a & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ a-1 & 2 & a-2 \end{bmatrix}$.

Решења

11. Детерминанта $=-6$.

12. $A^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 & 4 & 2 \\ -7 & 0 & 7 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

13. $A^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 15 & -5 \\ -1 & 13 & -5 \\ 3 & -9 & 5 \end{bmatrix}$.

14. $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

15. $X=B(A+3E)^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 20 & -8 & 8 \end{bmatrix}$.

16. $X=(A^{-1}B-E)^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 8 & 10 & 7 \\ -5 & -8 & -7 \\ 22 & 17 & 0 \end{bmatrix}$, при чему је $A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -5 & 4 & -11 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

17. $X=(A-2E)^{-1}(E-A)B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

18. $rang(A)=3$.

19. $(a,b)=(1,2)$.

20. $rang(A)=1$ за $a=2$, $rang(A)=2$ за $a=1$ и $rang(A)=3$ за $a\notin\{1,2\}$.