# Системи линеарних једначина

## Математика 1 - лекција 3

*Душан Ђукић*

---

**Гаусов метод**

1. Решити систем једначина $\begin{cases} -x+2y+3z = 2 \\ 2x+y-2z = 2 \\ 4x+3y+z = 1 \end{cases}$.

   *Решење.* Из друге и треће једначине елиминишемо $x$, тако што додајемо другој једначини прву помножену са 2, а трећој прву помножену са 4. Добијамо $\begin{cases} -x+2y+3z = 2 \\ 5y+4z = 6 \\ 11y+13z = 9 \end{cases}$.
   Сада трећој једначини додајемо другу помножене са $-\frac{11}{5}$, како бисмо из ње елиминсали $y$. Добија се $\begin{cases} -x+2y+3z = 2 \\ 5y+4z = 6 \\ \frac{21}{5}z = -\frac{21}{5} \end{cases}$. Поделимо једначине са $-1$, 5 и $\frac{21}{5}$, тако да у свакој први коефицијент буде 1: $\begin{cases} x-2y-3z = -2 \\ y+\frac{4}{5}z = \frac{6}{5} \\ z = -1 \end{cases}$.
   Сада можемо да елиминишемо $z$ из прве две једначине додавањем првој и другој једначини трећу помножену са $-3$ и $-\frac{4}{5}$ редом: $\begin{cases} x-2y = -5 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$. Најзад, додајемо првој једначини другу помножену са 2 и добијамо решење система: $x=-1$, $y=2$, $z=-1$.

2. Наћи опште решење система једначина $\begin{cases} x+y+z+u+v = 1 \\ x+y-2z+3u-4v = 2 \\ 2x+2y+3z-4u+v = 0 \end{cases}$.

   *Решење.* Прву једначину одузимамо од друге и (помножену са 2) од треће. Тако елиминишемо $x$ и $y$ из друге две једначине: $\begin{cases} x+y+z+u+v = 1 \\ -3z+2u-5v = 1 \\ z-6u-v = -2 \end{cases}$. Трећу једначину помножену са 3 додајемо другој: $\begin{cases} x+y+z+u+v = 1 \\ z-6u-v = -2 \\ -16u-8v = -5 \end{cases}$, тј. $\begin{cases} x+y+z+u+v = 1 \\ z-6u-v = -2 \\ u+\frac{1}{2}v = \frac{5}{16} \end{cases}$.
   Овако смо свели систем на квази-троугаони: водеће непознате у ове три једначине су $x,z,u$. Сувишна појављивања ових непознатих елиминишемо на већ описан начин. Две неводеће променљиве, $y$ и $v$, биће нам параметри у општем решењу.
   Трећу једначину одузимамо од прве и (помножену са 6) додајемо другој, тако да елиминишемо сувишна појављивања $u$: $\begin{cases} x+y+z+\frac{1}{2}v = \frac{11}{16} \\ z+2v = -\frac{1}{8} \\ u+\frac{1}{2}v = \frac{5}{16} \end{cases}$. Исто урадимо и са непознатом $z$, одузимањем друге једначине од треће: $\begin{cases} x+y-\frac{3}{2}v = \frac{13}{16} \\ z+2v = -\frac{1}{8} \\ u+\frac{1}{2}v = \frac{5}{16} \end{cases}$.
   Ово је крај, јер су све непознате директно изражене преко параметара $y=s$ и $v=t$: $(x,y,z,u,v) = (\frac{13}{16}-s+\frac{3}{2}t, s, -\frac{1}{8}-2t, \frac{5}{16}-\frac{1}{2}t, t)$.

3. Решити систем једначина $\begin{cases} (a+2)x+y = a-1 \\ x-ay+z = 1-2a \\ ax-y+z = -1 \end{cases}$ у зависности од параметра $a$.

   *Решење.* Одузмимо другу једначину од треће: $\begin{cases} x-ay+z = 1-2a \\ (a+2)x+y = a-1 \\ (a-1)x+(a-1)y = 2(a-1) \end{cases}$. Трећу једначину смемо да поделимо са $a-1$ - али *само ако је* $a \neq 1$: $\begin{cases} x-ay+z = 1-2a \\ (a+2)x+y = a-1 \\ x+y = 2 \end{cases}$.

   Сада одузмимо трећу једначину од друге: $\begin{cases} x-ay+z = 1-2a \\ (a+1)x = a-3 \\ x+y = 2 \end{cases}$. И овде другу једначину смемо да поделимо са $a+1$ само ако је $a \neq -1$: $\begin{cases} x-ay+z = 1-2a \\ x+y = 2 \\ x = \frac{a-3}{a+1} \end{cases}$.

Одузимање треће једначине од прве две даје $\begin{cases} -ay+z &= \frac{4-2a-2a^2}{a+1} \\ y &= \frac{a+5}{a+1} \\ x &= \frac{a-3}{a+1} \end{cases}$, па додавањем друге (помножене са $a$) првој најзад добијамо $(x,y,z) = (\frac{a-3}{a+1}, \frac{a+5}{a+1}, 4-a)$ - *за* $a \notin \{-1,1\}$.

Случајеве $a = \pm 1$ морамо посебно да испитамо.

- За $a=1$, систем се своди на $\begin{cases} x-y+z &= -1 \\ 3x+y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$. То је неодређен систем, и узимајући неводећу непознату $x$ као параметар добијамо опште решење $(x,y,z) = (x, -3x, -1-4x)$.
- За $a=-1$, систем се своди на $\begin{cases} x+y+z &= 1-2a \\ 0 &= -4 \\ x+y &= 2 \end{cases}$. Тај систем је противречан: нема решења.

**Крамерово правило**

*Применљиво само за квадратне системе!*

4. Решити систем једначина $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x - y - z = 0 \end{cases}$.

*Решење.* Детерминанта система $D$ је детерминанта матрице коефицијената система. У овом случају то је $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overline{\overline{\overline{V_3+V_1}}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6.$

Решења система су $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$, $z = \dfrac{D_z}{D}$, *под претпоставком да је* $D \neq 0$.

Детерминанту $D_x$ добијамо тако што *прву колону у* $D$ (тј. колону коефицијената уз $x$ - у овом случају $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$) заменимо колоном са десне стране једнакости (у овом случају колона $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$): дакле, $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overline{\overline{\overline{K_2-K_3}}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3.$

Слично налазимо $D_y$ (заменом *друге* колоне у $D$) и $D_z$ (заменом *треће* колоне):

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 21$ и $D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -9.$

Према томе, $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{21}{6} = \dfrac{7}{2}$ и $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{-9}{6} = -\dfrac{3}{2}$.

5. Решити систем $\begin{cases} x + ay + (a-1)z = 1 \\ 2x + (3-a)y + z = 2 \\ x + y + az = a+1 \end{cases}$ у зависности од параметра a.

*Решење.* Одредимо $D, D_x, D_y$ и $D_z$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a-1 \\ 2 & 3-a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overline{\overline{\overline{\frac{V_3-V_1}{V_2-2V_1}}}} \begin{vmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & 3-3a & 3-2a \\ 0 & 1-a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3a & 3-2a \\ 1-a & 1 \end{vmatrix} = -2a(a-1);$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & a & a-1 \\ 2 & 3-a & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{vmatrix} \overline{\overline{\overline{\frac{V_3-(a+1)V_1}{V_2-2V_1}}}} \begin{vmatrix} 1 & a & a-1 \\ 0 & 3-3a & 3-2a \\ 0 & 1-a-a^2 & 1+a-a^2 \end{vmatrix} = a(a^2-5a+5);$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{vmatrix} \overline{\overline{\overline{K_2-K_1}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a(2a-3);$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 3-a & 2 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \overline{\overline{\overline{K_3-K_1}}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 3-a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 3-a \end{vmatrix} = -a(a-1).$$

Детерминанта система $D$ је једнака нули за $a=0$ и $a=1$. Те случајеве испитујемо посебно. За $a \notin \{0,1\}$ је $(x,y,z) = \left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}, \dfrac{D_z}{D}\right) = \left(\dfrac{a^2-5a+5}{2(1-a)}, \dfrac{2a-3}{2(1-a)}, \dfrac{1}{2}\right)$.

- За $a=0$, систем постаје $\begin{cases} x - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{(J_2+J_1)/3} \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, што је неодређен систем. Са параметром $x$, опште решење је $(x,y,z) = (x, 1-x, x-1)$.
- За $a=1$, систем постаје $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow[J_3-J_1]{J_2-2J_1} \begin{cases} x+y = 1 \\ z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ што нема решења.

**Задаци за вежбу**

Решити системе једначина:

6. $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - 4y + 4z = 1 \\ -x + y + 3z = 2 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ -2x + y + 3z = -4 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y - z + t = 1 \\ x + z - t = -2 \\ -x + y + t = 2 \end{cases}$.

Наћи општа решења следећих система:

9. $\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 3x - y - t = 3 \\ 4x - 3y + 2z - t = 1 \end{cases}$.

У зависности од параметара решити (и дискутовати) системе:

11. $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ ax + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$ (параметар $a$);

12. $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a-1)z = a \\ x + y + z = a+1 \end{cases}$ (параметар $a$);

13. $\begin{cases} x - y + az = a \\ x + ay - z = -a \\ ax + y - z = 0 \end{cases}$ (параметар $a$);

14. $\begin{cases} (2a-1)x + y - az = 1-a \\ (a+1)x - ay + (3a+1)z = a+2 \\ x + az = 3-2a. \end{cases}$ (параметар $a$);

15. $\begin{cases} x + ay - z + t = 1 \\ x + y + az - t = 2 \\ x - y + z + at = 3 \end{cases}$ (параметар $a$);

16. $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x + ay + bz = 2 \\ x - by - az = 0 \end{cases}$ (параметри $a, b$);

17. $\begin{cases} (a+1)x + y = 1 \\ ax + by + z = 2 \\ bx - z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ (параметри $a, b$).

**Решења**

6. $(x, y, z) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$.
7. $(x, y, z) = (\frac{21}{19}, \frac{14}{19}, -\frac{16}{19})$.
8. $(x, y, z, t) = (-1, 0, 0, 1)$.
9. $(x, y, z) = (x, 11x - 8, 7 - 8x)$.
   *Напомена.* У задацима попут овог, опште решење се може описати на разне начине: нпр. одговор $(x, y, z) = (1-t, 3-11t, -1+8t)$ је наизглед другачији, али у ствари описује исти скуп решења.
10. $(x, y, z, t) = (x, y, -1 - \frac{1}{2}x + y, 3x - y - 3)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
11. За $a \neq 5$ решење је $(x, y, z) = (\frac{6}{3a-15}, \frac{5a-39}{3a-15}, \frac{7a-45}{3a-15})$.
    За $a = 5$ систем је противречан.

12. За $a \neq 1$ решење је $(x,y,z) = (\frac{a^3-a^2-2a+1}{1-a}, \frac{a}{1-a}, a+a^2)$.
За $a = 1$ систем је противречан.

13. За $a \notin \{-1,0,1\}$ решење је $(x,y,z) = (\frac{2}{a+1}, \frac{-a^2+a-2}{a^2-1}, \frac{a-2}{a-1})$.
За $a = -1$ и $a = 1$ систем је противречан.
За $a = 0$ систем је неодређен и опште решење је $x = y = z$.

14. За $a \notin \{-1, -\frac{1}{2}, 1\}$ решење је $(x,y,z) = (\frac{-3a^2+8a+3}{(2a+1)(a+1)}, \frac{-17a^2+3a+4}{(2a+1)(a+1)}, \frac{-4a^2+3a-1}{(2a+1)(a+1)})$.
За $a = -1$ и $a = -\frac{1}{2}$ систем је противречан.
За $a = 1$ систем је неодређен и опште решење је $(x,y,z) = (t, 1-2t, 1-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

15. Систем је у сваком случају неодређен.
Опште решење је $(x,y,z,t) = (-au + \frac{2a^2+2a+6}{a^2+3}, u - \frac{a+3}{a^2+3}, u, u + \frac{a-3}{a^2+3})$, $u \in \mathbb{R}$..

16. Ако је $b \notin \{a, 1-a\}$, решење је $(x,y,z) = (\frac{-2-a-b}{a+b-1}, \frac{-b-4a-2}{(b-a)(a+b-1)}, \frac{a+4b+2}{(b-a)(a+b-1)})$.
Ако је $a = b = -\frac{2}{5}$, систем је неодређен и опште решење је $(\frac{2}{3}, y, -\frac{5}{3} - y)$.
У осталим случајевима систем је противречан.

17. Ако је $(4b-7)a \neq 2b^2 - 8b$, систем је противречан.
Ако је $b \notin \{0, 1, \frac{7}{4}\}$ и $a = \frac{2b^2-8b}{4b-7}$, решење је $(x,y,z) = (\frac{4b-7}{2b^2-2b}, \frac{2b+7}{2b^2-2b}, \frac{-3}{2b-2})$.
Ако је $b \in \{0,1\}$, систем је противречан.