Криве другог реда

Математика 1 - лекција 4

Душан Ђукић

Крива другог реда је крива у координатној равни чија је једначина облика

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (*)$$

За овакву криву кажемо да је сведена на *канонски облик* ако је у $(*)$:

$$(i)\ B = 0; \quad (ii)\ A = 0 \text{ или } D = 0; \quad (iii)\ C = 0 \text{ или } E = 0.$$

Класификација кривих у канонском облику:

1° *Елиптички тип* - $Ax^2 + Cy^2 = F$ са $A, C > 0$:
- $1^\circ 1$. $F > 0$: *елипса*,
- $1^\circ 2$. $F = 0$: *тачка*,
- $1^\circ 3$. $F < 0$: *празан скуп*;

2° *Параболички тип* - $Ax^2 + 2Ey = F$ са $A > 0$ (или $Cy^2 + 2Dx = F$ са $C > 0$):
- $2^\circ 1$. $E \neq 0$: *парабола*,
- $2^\circ 2$. $D = E = 0$, $F > 0$: *две паралелне праве*,
- $2^\circ 3$. $D = E = 0$, $F = 0$: *права*,
- $2^\circ 4$. $D = E = 0$, $F < 0$: *празан скуп*;

3° *Хиперболички тип* - $Ax^2 + Cy^2 = F$ са $A > 0 > C$:
- $3^\circ 1$. $F \neq 0$: *хипербола*,
- $3^\circ 2$. $F = 0$: *две пресецајуће праве*.

Свођење криве на канонски облик захтева трансформацију координатног система *транслацијом* и *ротацијом*. При транслацији или ротацији координатног система, *старе* координате (x, y) се изражавају преко *нових* (x', y') на следећи начин:

(1) *Ротација* за угао α око тачке $O(0,0)$: $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$;

(2) *Транслација* за вектор (u, v): $\begin{cases} x = x' - u \\ y = y' - v \end{cases}$.

Поступак свођења на канонски облик је следећи:

(1) Обавља се *ротација* за угао α за који је $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2B}{A-C}$. Тада је $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ и $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$, при чему је

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

Новодобијена једначина ће бити облика $A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$. *Коефицијент уз* $x'y'$ *је* $2B' = 0$.

(2) Затим се обавља *транслација* за вектор (u, v), где је $u = \frac{D'}{A'}$ за $A' \neq 0$ и $v = \frac{E'}{C'}$ за $C' \neq 0$. Ако је $A' = 0$ (или $C' = 0$), узимамо $u = 0$ (односно $v = 0$). Тада је $x' = x'' - u$ и $y' = y'' - v$. Једначина коју добијамо је у канонском облику.

(3) Обично је пожељно написати одговарајуће *смене координата*, тј. написати старе координате x, y у функцији нових x'', y''.

1. Свести на канонски облик криву $3x^2+3xy-y^2+6x+6y-2=0$.

Решење. Угао ротације α задовољава $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{3}{3(-1)}=\frac{3}{4}$. Даље је $\frac{3}{4}=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, дакле $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ или $\mathrm{tg}\alpha=-3$. Узимамо $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{3}$. Сада је $\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{3}{\sqrt{10}}$, па је $x=\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}$ и $y=\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$. Једначина криве постаје

$$\begin{aligned}\frac{3(3x'-y')^2}{10}+\frac{3(3x'-y')(x'+3y')}{10}-\frac{(x'+3y')^2}{10}+\frac{6(3x'-y')}{\sqrt{10}}+\frac{6(x'+3y')}{\sqrt{10}}-2=&\\ \frac{7}{2}x'^2-\frac{3}{2}y'^2+\frac{24}{\sqrt{10}}x'+\frac{12}{\sqrt{10}}y'-2=&\quad 0.\end{aligned}$$

Следеће, вектор транслације је $(\frac{D'}{A'},\frac{E'}{C'})=(\frac{24}{7\sqrt{10}},-\frac{4}{\sqrt{10}})$, јер је $A'=\frac{7}{2}$, $C'=-\frac{3}{2}$, $D'=\frac{12}{\sqrt{10}}$ и $E'=\frac{6}{\sqrt{10}}$. Једначина криве постаје

$$\begin{aligned}\frac{7}{2}(x''-\frac{24}{7\sqrt{10}})^2-\frac{3}{2}(y''+\frac{4}{\sqrt{10}})^2+\frac{24}{\sqrt{10}}(x'-\frac{24}{7\sqrt{10}})+\frac{12}{\sqrt{10}}(y'+\frac{4}{\sqrt{10}})-2=&\\ \frac{7}{2}x''^2-\frac{3}{2}y''^2-\frac{26}{7}=&\quad 0.\end{aligned}$$

Дакле, канонски облик је $\frac{7}{2}x''^2-\frac{3}{2}y''^2-\frac{26}{7}=0$, што је хипербола.

Одговарајуће трансформације координата су $x=\frac{3(x''-\frac{24}{7\sqrt{10}})-(y''+\frac{4}{\sqrt{10}})}{\sqrt{10}}=\frac{3x''-y''}{\sqrt{10}}-\frac{10}{7}$ и $y=x=\frac{(x''-\frac{24}{7\sqrt{10}})+3(y''+\frac{4}{\sqrt{10}})}{\sqrt{10}}=\frac{x''+3y''}{\sqrt{10}}+\frac{6}{7}$.

2. Свести на канонски облик криву $x^2-xy+y^2-6x-5=0$.

Решење. Угао ротације: $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{-1}{1-1}=\infty$, дакле можемо узети $2\alpha=90°$, па је $\alpha=45°$ и $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Зато је $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ и $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. Једначина криве се своди на

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-5=\frac{x'^2}{2}+\frac{3y'^2}{2}-\frac{6x'}{\sqrt{2}}+\frac{6y'}{\sqrt{2}}-5=0.$$

Вектор транслације је $(-\frac{6}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{2}})$, значи $x'=x''+\frac{6}{\sqrt{2}}$, $y'=y''-\frac{2}{\sqrt{2}}$. Нова једначина је

$$\frac{(x''+\frac{6}{\sqrt{2}})^2}{2}+\frac{3(y''-\frac{2}{\sqrt{2}})^2}{2}-\frac{6(x''+\frac{6}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}+\frac{6(y''-\frac{2}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}-5=\frac{1}{2}x''^2+\frac{3}{2}y''^2-17=0,$$

што је елипса.

Смене координата су $x=\frac{(x''+\frac{6}{\sqrt{2}})-(y''-\frac{2}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}=\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}+4$ и $y=\frac{(x''+\frac{6}{\sqrt{2}})+(y''-\frac{2}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}=\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}+2$.

Задаци за вежбу

Свести на канонски облик следеће криве и написати одговарајуће смене координата:

3. $x^2+3xy+y^2+2x+8y+4=0$;
4. $x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2-12x\sqrt{3}+18y\sqrt{6}-21=0$;
5. $4x^2+3xy+2x-6y+5=0$;
6. $2x^2+4xy+5y^2+8x+8y=0$;
7. $x^2-3xy+5y^2+6x+2y+20=0$;
8. $10x^2+12xy+15y^2-10x-6y+2=0$;
9. $3x^2+3xy-y^2+x-3y-\frac{5}{3}=0$;
10. $x^2+xy+y^2+2x-4y-3=0$;
11. $-4x^2+8xy+11y^2+4x+6y=0$;
12. $30x^2+20xy+9y^2+12x+4y=0$;
13. $-x^2+\sqrt{5}xy+y^2-2y=0$.

Решења

3. Хипербола $5x''^2 - y''^2 + 16 = 0$; смене координата $(x, y) = (\frac{x''-y''}{\sqrt{2}} - 4, \frac{x''+y''}{\sqrt{2}} + 2)$.

4. Парабола $x''^2 - 10\sqrt{2}y'' - 3 = 0$; смене координата $(x, y) = (\frac{x''+y''\sqrt{2}-(4+2\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \frac{x''\sqrt{2}-y''+(\sqrt{6}-4\sqrt{2})}{\sqrt{3}})$.

5. Хипербола $9x''^2 - y''^2 + 50 = 0$; $(x, y) = (\frac{x''-y''\sqrt{8}}{3} + 2, \frac{x''\sqrt{8}+y''}{3} - 6)$.

6. Елипса $6x''^2 + y''^2 - 8 = 0$; $(x, y) = (\frac{x''-2y''}{\sqrt{5}} - 2, \frac{2x''+y''}{\sqrt{5}})$.

7. Дегенерисана крива (тачка) $11x''^2 + y''^2 = 0$; $(x, y) = (\frac{x''+3y''}{\sqrt{10}} - 6, \frac{3x''-y''}{\sqrt{10}} - 2)$.

8. Елипса $19x''^2 + 6y''^2 - \frac{1}{2} = 0$; $(x, y) = (\frac{2x''-3y''}{\sqrt{13}} + \frac{1}{2}, \frac{3x''+2y''}{\sqrt{13}})$.

9. Дегенерисана крива (две пресецајуће праве) $7x''^2 - 3y''^2 = 0$; $(x, y) = (\frac{3x''-y''}{\sqrt{10}} + \frac{1}{3}, \frac{x''+3y''}{\sqrt{10}} - 1)$.

10. Елипса $3x''^2 + y''^2 - \frac{74}{3} = 0$; $(x, y) = (\frac{x''-y''}{\sqrt{2}} - \frac{8}{3}, \frac{x''+y''}{\sqrt{2}} + \frac{10}{3})$.

11. Хипербола $-5x''^2 + 12y''^2 - \frac{2}{3} = 0$.

12. Елипса $34x''^2 + 5y''^2 - \frac{6}{5} = 0$.

13. Хипербола $x''^2 - y''^2 + \frac{2}{27} = 0$.