

## Dinamika krutog tela

### Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela

Slobodno telo ima šest stepeni slobode: tri koordinate pola translacije i tri Ojlerova ugla. U dinamici tela pogodno je da se za pol translacije uzeti centar masa  $C$ . Za rešavanje osnovnih zadataka dinamike potrebno je napisati šest jednačina koje povezuju nezavisne parametre i sile koje deluju na telo. Te jednačine su

$$\dot{\vec{K}} = m\dot{\vec{V}}_C = \vec{F}_R^s, \quad m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s.$$

### Diferencijalne jednačine translatornog kretanja tela

Ako se u tački  $O$  tela ( $\vec{OC} = \vec{r}_C$ ), koje se kreće translatorno, postavi Dekartov koordinatni sistem  $Oxyz$ , koristeći diferencijalnu jednačinu kretanja središta masa, dobija se

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad m\ddot{z}_C = Z_R^s.$$

Kako kod translatornog kretanja tela važi da je:  $\vec{\omega} = 0$ ,  $\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s$ , i kako je  $L_{Cz} = J_{Cz}\omega_z$ , sledi da je  $\vec{M}_C^s = 0$ . Na osnovu toga je  $M_{Cx}^s = 0$ ,  $M_{Cy}^s = 0$  i  $M_{Cz}^s = 0$ . Ove jednačine nazivaju se uslovima kompatibilnosti i služe da se odrede nepoznate sile koje deluju na telo, da bi kretanje bilo translatorno.

### Diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose

Telo koje se obrće oko nepokretne ose ima jedan stepen slobode i njegov položaj određen je uglom obrtanja  $\varphi$ . Diferencijalne jednačine kretanja tela su  $m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s$  i  $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A^s$ . Ove jednačine pogodno je projektovati na ose pokretnog koordinatnog sistema  $A\xi\eta\zeta$ , jer se položaj centra masa i vrednosti momenata inercije tela, ne menjaju. Neka na telo deluje sistem od  $n$  aktivnih sila ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ) i reakcije veza

$$\vec{R}_A = R_{A\xi}\vec{\lambda} + R_{A\eta}\vec{\mu} + R_{A\zeta}\vec{\nu} \quad \text{i} \quad \vec{R}_B = R_{B\xi}\vec{\lambda} + R_{B\eta}\vec{\mu}.$$

Izvod vektora, koji je određen u odnosu na ose pokretnog trijedra, ima dva člana, relativni (lokalni) i prenosni, pa je

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d_r\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}, \quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_A.$$

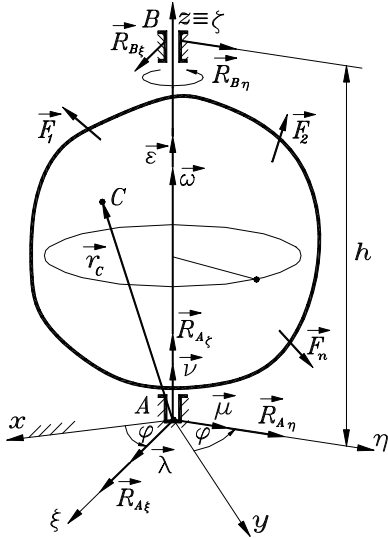
Sada vektorske diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose postaju

$$\frac{d_r\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{F}_R^a + \vec{R}_A + \vec{R}_B, \quad \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_A = \vec{M}_A^a + \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A(\vec{R}_B).$$

Polazeći od

$$\vec{K} = K_\xi\vec{\lambda} + K_\eta\vec{\mu} + K_\zeta\vec{\nu}, \quad \frac{d_r\vec{K}}{dt} = \frac{dK_\xi}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dK_\eta}{dt}\vec{\mu} + \frac{dK_\zeta}{dt}\vec{\nu},$$

$$\vec{K} = m\vec{V}_C = m(\vec{\omega} \times \vec{r}_C) = m \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = -m\omega_z\eta_C\vec{\lambda} + m\omega_z\xi_C\vec{\mu},$$



dobija se da je  $\frac{d_r \vec{K}}{dt} = -m\varepsilon_z \eta_C \vec{\lambda} + m\varepsilon_z \xi_C \vec{\mu}$ , jer je  $\dot{\xi}_C = \dot{\eta}_C = 0$ . Drugi član je

$$\vec{\omega} \times \vec{K} = \omega_z \vec{v} \times \vec{K} = \omega_z \vec{v} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_C) = m\omega_z \vec{v} \times (-\omega_z \eta_C \vec{\lambda} + \omega_z \xi_C \vec{\mu}) = m\omega_z^2 \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\eta_C & \xi_C & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{K} = -m\omega_z^2 \xi_C \vec{\lambda} - m\omega_z^2 \eta_C \vec{\mu}.$$

Koristeći definiciju momenta količine kretanja, za kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose je

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \int_V (\vec{r} \times \vec{V}) dm = \int_V (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \vec{\omega} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}) dm - \int_V \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) dm \\ \vec{L}_A &= \omega_z \vec{v} \int_V (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dm - \omega_z \int_V (\xi \zeta \vec{\lambda} + \eta \zeta \vec{\mu} + \zeta^2 \vec{v}) dm, \\ L_{A\xi} &= -\omega_z \int_V \xi \zeta dm = -\omega_z J_{\xi\zeta}, \quad L_{A\eta} = -\omega_z \int_V \eta \zeta dm = -\omega_z J_{\eta\zeta}, \\ L_{A\zeta} &= \omega_z \int_V (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta^2) dm = \omega_z J_{\zeta}, \end{aligned}$$

pa su lokalni izvodi

$$\dot{L}_{A\xi} = -\varepsilon_z J_{\xi\zeta}, \quad \dot{L}_{A\eta} = -\varepsilon_z J_{\eta\zeta}, \quad \dot{L}_{A\zeta} = \varepsilon_z J_{\zeta},$$

i

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_A = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ -\omega_z J_{\xi\zeta} & -\omega_z J_{\eta\zeta} & \omega_z J_{\zeta} \end{vmatrix} = \omega_z^2 J_{\eta\zeta} \vec{\lambda} - \omega_z^2 J_{\xi\zeta} \vec{\mu}.$$

Momenti reakcija veza, za tačku A, su

$$\vec{M}_A(\vec{R}_A) = 0, \quad \vec{M}_A(\vec{R}_B) = \vec{r}_B \times \vec{R}_B = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ 0 & 0 & h \\ R_{B\xi} & R_{B\eta} & 0 \end{vmatrix} = -hR_{B\eta} \vec{\lambda} + hR_{B\xi} \vec{\mu}.$$

Kako je  $\vec{\omega} = \omega_z \vec{v} = \dot{\phi} \vec{v}$ , i  $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{v} = \dot{\phi} \vec{v}$ , skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose su

$$\begin{aligned} -m\ddot{\phi}\eta_C - m\dot{\phi}^2 \xi_C &= F_{R\xi}^a + R_{A\xi} + R_{B\xi}, \\ m\ddot{\phi}\xi_C - m\dot{\phi}^2 \eta_C &= F_{R\eta}^a + R_{A\eta} + R_{B\eta}, \\ 0 &= F_{R\zeta}^a + R_{A\zeta}, \\ -\ddot{\phi}J_{\xi\zeta} + \dot{\phi}^2 J_{\eta\zeta} &= M_{A\xi}^a - hR_{B\eta}, \\ -\ddot{\phi}J_{\eta\zeta} - \dot{\phi}^2 J_{\xi\zeta} &= M_{A\eta}^a + hR_{B\xi}, \\ J_{\zeta}\ddot{\phi} &= M_{A\zeta}^a. \end{aligned} \tag{B}$$

Koristeći jednačine (A) ( $m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s$ ,  $\vec{L}_A = \vec{M}_A^s$ ), kao i jednačine koje izražavaju D'alamberov princip za materijalni sistem ( $\vec{F}_R^s + \vec{F}_R^{in} = 0$ ,  $\vec{M}_A^s + \vec{M}_A^{in} = 0$ ), skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose mogu se napisati u obliku

$$\begin{aligned}
F_{R\xi}^a + R_{A\xi} + R_{B\xi} + F_{R\xi}^{in} &= 0, \\
F_{R\eta}^a + R_{A\eta} + R_{B\eta} + F_{R\eta}^{in} &= 0, \\
F_{R\zeta}^a + R_{A\zeta} + F_{R\zeta}^{in} &= 0, \\
M_{A\xi}^a - hR_{B\eta} + M_{R\xi}^{in} &= 0, \\
M_{A\eta}^a + hR_{B\xi} + M_{R\eta}^{in} &= 0, \\
M_{A\zeta}^a + M_{R\zeta}^{in} &= 0.
\end{aligned} \tag{C}$$

Poređenjem jednačina (B) i (C), projekcije glavnog vektora i glavnog momenta sila inercije, tela koje se obrće oko nepokretne ose, na ose pokretnog koordinatnog sistema su

$$\begin{aligned}
F_{R\xi}^{in} &= m\ddot{\phi}\eta_C + m\dot{\phi}^2\xi_C, & F_{R\eta}^{in} &= -m\ddot{\phi}\xi_C + m\dot{\phi}^2\eta_C, & F_{R\zeta}^{in} &= 0, \\
M_{A\xi}^{in} &= \ddot{\phi}J_{\xi\xi} - \dot{\phi}^2J_{\eta\zeta}, & M_{A\eta}^{in} &= \ddot{\phi}J_{\eta\zeta} + \dot{\phi}^2J_{\xi\xi}, & M_{A\zeta}^{in} &= -J_{\zeta}\ddot{\phi}.
\end{aligned}$$

### Određivanje reakcija u ležištima tela koje se obrće oko nepokretne ose

Reakcije u ležištima tela koje se obrće oko nepokretne ose, koje su određene iz prvih pet jednačina u (B) i (C), mogu se prikazati i na sledeći način

$$\begin{aligned}
\vec{R}_A &= \vec{R}_A^{st} + \vec{R}_A^d, & \vec{R}_B &= \vec{R}_B^{st} + \vec{R}_B^d, \\
R_{A\xi} &= R_{A\xi}^{st} + R_{A\xi}^d, & R_{A\eta} &= R_{A\eta}^{st} + R_{A\eta}^d, & R_{A\zeta} &= R_{A\zeta}^{st} + R_{A\zeta}^d, \\
R_{B\xi} &= R_{B\xi}^{st} + R_{B\xi}^d, & R_{B\eta} &= R_{B\eta}^{st} + R_{B\eta}^d.
\end{aligned}$$

Statičke reakcije bi se pojavile i onda kada veze ne dozvoljavaju obrtanje, a dinamičke reakcije su posledica obrtanja tela. Jednačine pomoću kojih se mogu odrediti statičke i dinamičke reakcije veza su

$$\begin{aligned}
F_{R\xi}^a + R_{A\xi}^{st} + R_{B\xi}^{st} &= 0, & R_{A\xi}^d + R_{B\xi}^d + m\ddot{\phi}\eta_C + m\dot{\phi}^2\xi_C &= 0, \\
F_{R\eta}^a + R_{A\eta}^{st} + R_{B\eta}^{st} &= 0, & R_{A\eta}^d + R_{B\eta}^d - m\ddot{\phi}\xi_C + m\dot{\phi}^2\eta_C &= 0, \\
F_{R\zeta}^a + R_{A\zeta}^{st} &= 0, & R_{A\zeta}^d &= 0, \\
M_{A\xi}^a - hR_{B\eta}^{st} &= 0, & -hR_{B\eta}^d + \ddot{\phi}J_{\xi\xi} - \dot{\phi}^2J_{\eta\zeta} &= 0, \\
M_{A\eta}^a + hR_{B\xi}^{st} &= 0, & hR_{B\xi}^d + \ddot{\phi}J_{\eta\zeta} + \dot{\phi}^2J_{\xi\xi} &= 0.
\end{aligned}$$

### Oslovi dinamičke uravnoteženosti tela koje se obrće oko nepokretne ose

Telo koje se obrće oko nepokretne ose biće dinamički uravnoteženo ako su dinamičke reakcije veza jednake nuli, tj.

$$R_{A\xi}^d = R_{A\eta}^d = R_{B\xi}^d = R_{B\eta}^d = 0.$$

Koristeći prethodne jednačine, dobijaju se dva para linearnih homogenih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}\eta_C + \dot{\phi}^2\xi_C &= 0, & \ddot{\phi}J_{\xi\xi} - \dot{\phi}^2J_{\eta\zeta} &= 0, & \dot{\phi}^2\xi_C + \ddot{\phi}\eta_C &= 0, & \dot{\phi}^2J_{\xi\xi} + \ddot{\phi}J_{\eta\zeta} &= 0, \\
-\ddot{\phi}\xi_C + \dot{\phi}^2\eta_C &= 0, & \ddot{\phi}J_{\eta\zeta} + \dot{\phi}^2J_{\xi\xi} &= 0, & -\ddot{\phi}\xi_C + \dot{\phi}^2\eta_C &= 0, & -\ddot{\phi}J_{\xi\xi} + \dot{\phi}^2J_{\eta\zeta} &= 0,
\end{aligned}$$

gde su nepoznate  $\xi_C$ ,  $\eta_C$ ,  $J_{\xi\xi}$  i  $J_{\eta\zeta}$ . Determinanta oba sistema jednačina je

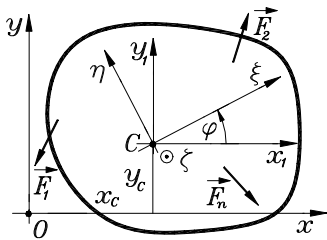
$$\begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ -\ddot{\phi} & \dot{\phi}^2 \end{vmatrix} = \dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2 \neq 0,$$

pa sistemi jednačina nemaju drugih rešenja, osim trivijalnog, tj.

$$\xi_C = \eta_C = 0 \quad J_{\xi\xi} = J_{\eta\zeta} = 0.$$

To znači, da bi telo koje se obrće oko nepokretne ose bilo dinamički uravnoteženo, treba da se centar masa tela nalazi na osi obrtanja i da osa obrtanja bude glavna osa inercije, pa odatle sledi da ta osa treba da bude glavna centralna osa. Praktična realizacija dinamičke uravnoteženosti postiže se dodavanjem ili oduzimanjem masa.

### Diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela



Telo koje vrši ravno kretanje ima tri stepena slobode. Razlažući ravno kretanje na translatorno i obrtno, može se reći da se ovo kretanje sastoji od translatornog sa polom translacije u centru masa  $C$  i obrtnog kretanja oko ose koja prolazi kroz pol  $C$ , a upravna je na ravnu figuru. Koristeći osnovne jednačine kretanja tela

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R, \quad \vec{L}_C = \vec{M}_C,$$

skalarne diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela

su

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad J_{C\zeta}\ddot{\phi} = M_{C\zeta}^s,$$

koje omogućavaju rešavanje oba zadatka dinamike.

U nekim slučajevima, kada je poznata putanja centra masa  $C$ , pogodno je koristiti ose prirodnog trijedra. Tada su skalarne diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela date sa

$$m \frac{dV_C}{dt} = F_{Rt}^s, \quad m \frac{V_C^2}{R_K} = F_{Rn}^s, \quad J_{C\zeta}\ddot{\phi} = M_{C\zeta}^s.$$

### Diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke

Neka se telo obrće oko nepokretne tačke  $O$ . U ovom slučaju, diferencijalne jednačine dobijaju se primenom teoreme o promeni momenta količine kretanja za nepokretni pol. Zakon o kretanju centra masa ovde se može iskoristiti za određivanje reakcija veza u nepokretnom polu. Diferencijalna jednačina je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^s.$$

Za dobijanje skalarnih diferencijalnih jednačina najpogodnije je koristiti pokretni koordinatni sistem  $O\xi\eta\zeta$ , kruto vezan za telo, jer se za te ose ne menjaju momenti inercije tela. U tom slučaju je

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu}, \\ \dot{\vec{L}}_O &= \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + L_{O\xi}\dot{\vec{\lambda}} + L_{O\eta}\dot{\vec{\mu}} + L_{O\zeta}\dot{\vec{\nu}}, \\ \dot{\vec{\lambda}} &= \vec{\omega} \times \vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}, \quad \dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega} \times \vec{\nu}, \\ \dot{\vec{L}}_O &= \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + L_{O\xi}(\vec{\omega} \times \vec{\lambda}) + L_{O\eta}(\vec{\omega} \times \vec{\mu}) + L_{O\zeta}(\vec{\omega} \times \vec{\nu}), \\ \dot{\vec{L}}_O &= \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + (\vec{\omega} \times L_{O\xi}\vec{\lambda}) + (\vec{\omega} \times L_{O\eta}\vec{\mu}) + (\vec{\omega} \times L_{O\zeta}\vec{\nu}), \\ \dot{\vec{L}}_O &= \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \vec{\omega} \times (L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu}), \\ \dot{\vec{L}}_O &= \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_O &= \frac{dL_{O\xi}}{dt} \vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt} \vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt} \vec{\nu} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ L_{O\xi} & L_{O\eta} & L_{O\zeta} \end{vmatrix}, \\ \dot{\vec{L}}_O &= \frac{dL_{O\xi}}{dt} \vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt} \vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt} \vec{\nu} + \\ &\vec{\lambda}(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}) + \vec{\mu}(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}) + \vec{\nu}(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}), \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \left[ \frac{dL_{O\xi}}{dt} + (\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}) \right] \vec{\lambda} + \left[ \frac{dL_{O\eta}}{dt} + (\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}) \right] \vec{\mu} + \\ &+ \left[ \frac{dL_{O\zeta}}{dt} + (\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}) \right] \vec{\nu} = \vec{M}_O^s.\end{aligned}$$

Oдавде sledi

$$\begin{aligned}\frac{dL_{O\xi}}{dt} + (\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}) &= M_{O\xi}^s, \\ \frac{dL_{O\eta}}{dt} + (\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}) &= M_{O\eta}^s, \\ \frac{dL_{O\zeta}}{dt} + (\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}) &= M_{O\zeta}^s.\end{aligned}$$

Ako su ose  $O\xi$ ,  $O\eta$  i  $O\zeta$  glavne ose inercije tela, skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke su

$$\begin{aligned}J_{O\xi} \frac{d\omega_\xi}{dt} + (J_{O\zeta} - J_{O\eta}) \omega_\eta \omega_\zeta &= M_{O\xi}^s, \\ J_{O\eta} \frac{d\omega_\eta}{dt} + (J_{O\xi} - J_{O\zeta}) \omega_\xi \omega_\zeta &= M_{O\eta}^s, \\ J_{O\zeta} \frac{d\omega_\zeta}{dt} + (J_{O\eta} - J_{O\xi}) \omega_\eta \omega_\xi &= M_{O\zeta}^s,\end{aligned}$$

koje se nazivaju Ojlerove dinamičke jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke. One predstavljaju sistem od tri nelinearne spregnute jednačine po  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$  i  $\omega_\zeta$ .

Ukoliko je moguće rešiti prethodni sistem jednačina i odrediti

$$\omega_\xi = \omega_\xi(t), \quad \omega_\eta = \omega_\eta(t), \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t),$$

tada se korišćenjem Ojlerovih kinematičkih jednačina

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},\end{aligned}$$

u nekim slučajevima, uz zadate početne uslove kretanja, mogu odrediti konačne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Ovde je razmatran opšti slučaj delovanja spoljašnjih sila. U tom slučaju ne postoje opšti integrali prethodnih diferencijalnih jednačina. Ako je telo teško i težina tela jedina aktivna sila postoje Ojlerov, Lagranžev i slučaj Kovalevske, u kojima se mogu odrediti rešenja diferencijalnih jednačina obrtanja tela oko nepokretne tačke.

**Diferencijalne jednačine opšteg kretanja tela**

Koristeći osnovne jednačine kretanja tela

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s$$

prve tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja tela su

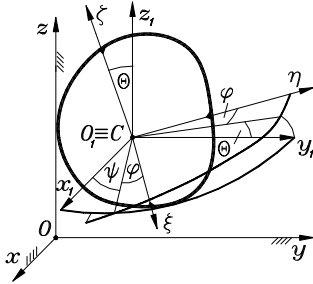
$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad m\ddot{z}_C = Z_R^s,$$

a ako su ose  $O\xi$ ,  $O\eta$  i  $O\zeta$  glavne ose inercije tela, slede tri Ojlerove jednačine

$$J_{O\xi} \frac{d\omega_\xi}{dt} + (J_{O\zeta} - J_{O\eta})\omega_\eta\omega_\zeta = M_{O\xi}^s,$$

$$J_{O\eta} \frac{d\omega_\eta}{dt} + (J_{O\xi} - J_{O\zeta})\omega_\xi\omega_\zeta = M_{O\eta}^s,$$

$$J_{O\zeta} \frac{d\omega_\zeta}{dt} + (J_{O\eta} - J_{O\xi})\omega_\eta\omega_\xi = M_{O\zeta}^s,$$



Ove jednačine predstavljaju sistem od šest diferencijalnih jednačina koje opisuju opšte kretanje tela. Prvim integraljenjem ovog sistema jednačina dobija se

$$x_C = x_C(t), \quad \omega_\xi = \omega_\xi(t),$$

$$y_C = y_C(t), \quad \omega_\eta = \omega_\eta(t),$$

$$z_C = z_C(t), \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t).$$

Korišćenjem Ojlerovih kinematičkih jednačina

$$\omega_\xi = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},$$

moгу se (u nekim sličajevima) dobiti rešenja

$$x_C = x_C(t), \quad \psi = \psi(t),$$

$$y_C = y_C(t), \quad \theta = \theta(t),$$

$$z_C = z_C(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$