Лимеси

Математика 1 - лекција 6

Душан Ђукић

---

1. Испитати који од следећих лимеса постоје. Одредити оне који постоје.
(а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}$; (б) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$; (в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; (г) $\lim\limits_{x\to 1}\arccos x$;
(д) $\lim\limits_{x\to 0-}\sqrt{x}$; (ђ) $\lim\limits_{x\to 3}x^{-\frac{1}{(x-3)^2}}$; (е) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$; (ж) $\lim\limits_{x\to 0}e^{1/x}$.

Решење. (а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\dfrac{3}{5}$.
(б) Лимес не постоји јер је $\cos 2n\pi=1$ и $\cos(2n+1)\pi=-1$ за све $n\in\mathbb{N}$.
(в) Како је $-\dfrac{1}{|x|}<\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{1}{|x|}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, следи $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.
(г) $\arccos x$ је непрекидна функција на $[-1,1]$, па је $\lim\limits_{x\to 1}\arccos x=\arccos 1=0$.
(д) Ово није $\sqrt{0}=0$; лимес не постоји јер $\sqrt{x}$ није дефинисано за $x<0$.
(ђ) Ако $x\to 3$, онда $(x-3)^2\to 0+$, $-\frac{1}{(x-3)^2}\to-\infty$ и $x^{-\frac{1}{(x-3)^2}}\to 3^{-\infty}=0$.
(е) За $x\to 0+$ имамо $\frac{1}{x}\to+\infty$ и $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\to\mathrm{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}$, али за $x\to 0-$, $\frac{1}{x}\to-\infty$ и $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\to-\frac{\pi}{2}$. Лимес не постоји.
(ж) Слично, за $x\to 0+$ (односно $x\to 0-$) важи $\frac{1}{x}\to+\infty$ (односно $\frac{1}{x}\to-\infty$) и $e^{1/x}\to\infty$ (односно $e^{1/x}\to 0$). Лимес не постоји.

2. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-2x^4+x^3-10}{x(x^2+3x+5)^2}$.

Решење. Дељењем бројиоца и имениоца са x^5 добијамо $f(x)=\dfrac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{10}{x^5}}{(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2})^2}$. Како $\frac{1}{x}\to 0$ када $x\to\infty$, тада $f(x)\to\frac{3-0+0+0}{(1+0+0)^2}=3$.

3. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x-1}-1}{x}$.

Решење. Посматрајмо функцију $f(x)=e^{e^x-1}$. Израз под лимесом је $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ што је по дефиницији једнако $f'(0)$. Пошто је $f'(x)=e^{e^x-1}e^x$, имамо $f'(0)=1$ и то је вредност датог лимеса.

4. Израчунати $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}$.

Решење. Имамо $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=1-\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}=1-\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$, где је $f(x)=\sqrt[3]{x+6}$. Али $f'(x)=\frac{1}{3}(x+6)^{-2/3}$ и $f'(2)=\frac{1}{12}$, па је задати лимес једнак $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

5. Израчунати $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt[7]{x^7-x^6})$.

Решење. Дати лимес можемо да запишемо у облику $\lim_{x\to\infty}x\left(1-\sqrt[7]{1-\frac{1}{x}}\right)$. Ако ставимо $r=\frac{1}{x}$, онда $x\to\infty$ повлачи $t\to 0$, а лимес можемо да препишемо у функцији од t као $\lim_{t\to\infty}\frac{1-\sqrt[7]{1-t}}{t}$. По Лопиталовом правилу овај лимес је једнак $\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{7}(1-t)^{-6/7}}{1}=\frac{1}{7}$.

6. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{(\mathrm{arctg}x)^2}$.

Решење. Лопиталовим правилом је $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{(\mathrm{arctg}x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x}{\frac{2\mathrm{arctg}x}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)(\cos x-e^x)}{2\mathrm{arctg}x}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(\cos x-e^x)-(x^2+1)(\sin x+e^x)}{\frac{2}{x^2+1}}=-\dfrac{1}{2}$.

7. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin\sin x}{\sin^3 x}$.

Решење. Лопиталовим правилом:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin\sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos\sin x}{3\sin^2 x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\sin\sin x+\sin x\cos\sin x}{6\sin x-9\sin^3 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos^3 x+\cos x)\cos\sin x-3\sin x\cos x\sin\sin x}{6\cos x-27\sin^2 x\cos x} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

8. Израчунати $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4^{x-1}-2^x+1}{x^3-3x+2}$.

Решење. Лопиталово правило двапут:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4^{x-1}-2^x+1}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{4^{x-1}\ln 4-2^x\ln 2}{3x^2-3} = \lim_{x\to 1}\frac{4^{x-1}\ln^2 4-2^x\ln^2 2}{6x} = \frac{\ln^2 4-2\ln^2 2}{6} = \frac{\ln^2 2}{3}.$$

9. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Решење. Ако запишемо $\cos x$ као $e^{\ln\cos x}$, дати лимес је једнак $L = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}$. Како је по Лопиталовом правилу $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{tg}x}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{-2}x}{2} = -\frac{1}{2}$, имамо $L = e^{-1/2}$.

10. Израчунати $\lim\limits_{x\to 6}(x-5)^{\frac{1}{6-x}}$.

Решење. Означимо $f(x) = (x-5)^{\frac{1}{6-x}}$. По Лопиталовом правилу имамо $\lim\limits_{x\to 6}\ln f(x) = \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\ln(x-5)}{6-x} = \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\frac{1}{x-5}}{-1} = \dfrac{\frac{1}{6-5}}{-1} = -1$. Одавде је $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = e^{-1}$.

11. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Решење. Ако означимо $y = x^x$, имамо $\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}}$, што је по Лопиталовом правилу једнако $\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$ и одатле $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

12. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+3n^2-n+2}{2n^3-n^2+3}\right)^{3n-2}$.

Решење. Означимо $f(n) = \left(\frac{2n^3+3n^2-n+2}{2n^3-n^2+3}\right)^{3n-2}$. За $n\to\infty$ важи $\frac{2n^3+3n^2-n+2}{2n^3-n^2+3}\to 1$, па користећи релацију $\lim_{z\to 1}\frac{\ln z}{z-1} = 1$ за $z = \frac{2n^3+3n^2-n+2}{2n^3-n^2+3}$ добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\ln f(n) = \lim_{n\to\infty}(3n-2)\ln\frac{2n^3+3n^2-n+2}{2n^3-n^2+3} = \lim_{n\to\infty}(3n-2)\left(\frac{2n^3+3n^2-n+2}{2n^3-n^2+3}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(4n^2-n-1)}{2n^3-n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+\cdots}{2n^3+\cdots} = 6.$$

Према томе, $\lim_{n\to\infty} f(n) = e^6$.