Rešenje pismenog ispita iz Numeričkih metoda, I grupa

1. Ispitati konvergenciju numeričkog reda

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k-2)!+1}{k!}.$$

Rešenje. Kako su redovi

$$1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k-2)!}{k!}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e-2,$$

konvergentni to je i njihov zbir konvergentan red, sa sumom

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k-2)!+1}{k!} = e-1.$$

2.a Oceniti gornju granicu greške koja može nastati prilikom rešavanja sistema linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} .6 & .6 \\ .6 & .60001 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{||\Delta b||_{+\infty}}{||b||_{+\infty}} \leq 10^{-5}.$$

Rešenje Kako važi

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq k(A)\frac{||\Delta b||}{||b||},$$

i kako je

$$A^{-1} \approx 10^5 \begin{bmatrix} 1.00002 & -1. \\ -1. & 1. \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je

$$||A||_{+\infty} \approx 1.2, \quad ||A^{-1}||_{+\infty} \approx 2.00002 \cdot 10^5, \quad k(A) \approx 2.4 \cdot 10^5,$$

i da važi

$$\frac{||\Delta x||_{+\infty}}{||x||_{+\infty}} \leq 2.4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} \approx 2.4.$$

2.b Koristeći Gauss-Seidelov metod rešiti sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} -.15 & 1.05 & -.2 \\ -.3 & -.08 & .9 \\ 1.25 & -.3 & -.15 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.95 \\ 1.49 \\ -2.075 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Ako premestimo jednačine sistema dobijamo sistem

$$A'x = b', \quad A' = \begin{bmatrix} 1.25 & -.3 & -.15 \\ -.15 & 1.05 & -.2 \\ -.3 & -.08 & .9 \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} -2.075 \\ 1.95 \\ 1.49 \end{bmatrix}.$$

Ovaj sistem jednačina je dijagonalno dominatan po vrstama, jer je

$$|1.25| > |-.3| + |-.15|, \quad |1.05| > |-.15| + |-.2|, \quad |.9| > |-.2| + |-.3|,$$

zaključujemo da Gauss-Seidelov metod konvergira.

Dobijamo iterativni proces

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -\begin{bmatrix} 1.25 & 0 & 0 \\ -.15 & 1.05 & 0 \\ -.3 & -.08 & .9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -.3 & -.15 \\ 0 & 0 & -.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1.25 & 0 & 0 \\ -.15 & 1.05 & 0 \\ -.3 & -.08 & .9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2.075 \\ 1.95 \\ 1.49 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & .24 & 0.12 \\ 0 & .0343 & .2076 \\ 0 & .083 & .0585 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -1.66 \\ 1.62 \\ 1.246 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uz početnu vrednost $x_0 = (0, 0, 0)$, nalazimo

$$\begin{aligned} x_1 &= (-1.660000000000000, 1.620000000000000, 1.246222222222222), \\ x_2 &= (-1.121653333333334, 1.934282328042328, 1.453607318048207) \\ x_3 &= (-1.021339363104057, 1.988114818232412, 1.491830418363751) \\ x_4 &= (-1.003832793420571, 1.997896347294918, 1.498535410841580), \\ x_5 &= (-1.000680627348230, 1.999623798158173, 1.499739684053539), \\ x_6 &= (-1.000121526355614, 1.999933055102253, 1.499953540557218), \\ x_7 &= (-1.000021641908593, 1.999988058881099, 1.499991724597678), \\ x_8 &= (-1.000003858916815, 1.999997872459060, 1.499998524579645), \\ x_9 &= (-1.000000687660268, 1.999999620730370, 1.499999737067055), \\ x_{10} &= (-1.000000122576665, 1.999999932406582, 1.499999953132808). \end{aligned}$$

Vidimo da je rešenje sistema do na 6 značajnih cifara dato sa $(-1., 2., 1.5)$.

3. Naći Lagrangeov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.	1.1	1.3	1.5
$f(x_k)$	0.	$-.1$	$-.9$	$-.3$

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački 1.25.

Rešenje. Konstruišemo bazisne funkcije

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{(x-1.1)(x-1.3)(x-1.5)}{(1.-1.1)(1.-1.3)(1.-1.5)} = -66.67(x-1.1)(x-1.3)(x-1.5), \\ \ell_1(x) &= \frac{(x-1.)(x-1.3)(x-1.5)}{(1.1-1.)(1.1-1.3)(1.1-1.5)} = 125.(x-1.)(x-1.3)(x-1.5), \\ \ell_2(x) &= \frac{(x-1.)(x-1.1)(x-1.5)}{(1.3-1.)(1.3-1.1)(1.3-1.5)} = -83.33(x-1.)(x-1.1)(x-1.5), \\ \ell_3(x) &= \frac{(x-1.)(x-1.1)(x-1.3)}{(1.5-1.)(1.5-1.1)(1.5-1.3)} = 25.(x-1.)(x-1.1)(x-1.3). \end{aligned}$$

Odakle dobijamo interpolacioni polinom na sledeći način

$$P_3(x) = 0\ell_0(x) - .1\ell_1(x) - .9\ell_2(x) - .3\ell_3(x).$$

Vrednost polinoma P_3 u tački 1.25 iznosi

$$P_3(1.25) = 0\ell_0(1.25) - .1\ell_1(1.25) - .9\ell_2(1.25) - .3\ell_3(1.25) = -.728.$$

4. Koristeći metod proste iteracije odrediti bar jedno rešenje jednačine $x = (x^3+1)/3$ sa relativnom greškom manjom od 10^{-4}.

   Rešenje. Ako nacrtamo grafike funkcija $y = x$ i $y = (x^3+1)/3$, videćemo da je rešenje približno .5. Posmatraćemo iterativni proces

   $$x_{k+1} = \phi(x_k) = \frac{x_k^3+1}{3}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = .5.$$

   Izvod iterativne funkcije je

   $$\phi'(x) = x^2 \geq 0, \quad |\phi'(x)| \leq q^2, \quad |x| \leq q.$$

   Vidimo da je iterativna funkcija rastuća, tako da se interval $[-1,1]$ slika u interval $[0, 2/3]$, pa se i interval $[-2/3, 2/3]$ slika u podskup skupa $[-2/3, 2/3]$. Kako je dodatno za $x \in [-2/3, 2/3]$ ispunjen uslov $|\phi'(x)| < 4/9 < 1$, vidimo da proces konvergira za poizvoljno $x_0 \in [-2/3, 2/3]$. Ako izaberemo $x_0 = .5 \in [-2/3, 2/3]$, dobijamo rezultate prikazane u tabeli 1. Vidimo da već u iteraciji 6 imamo bar četiri značajne cifre.

k	x_k
0	.5
1	.375
2	.350911458333333
3	.347736944662936
4	.347349564354668
5	.347302774110367
6	.347297129547347
7	.347296448715642
8	.347296366597085
9	.347296356692372
10	.347296355497717

Table 1: Iteracije procesa $x_{k+1} = (x_k^3+1)/3$, $x_0 = .5$

5. Odrediti A_0, A_1 i A_2 tako da kvadraturna formula

   $$\int_{-1}^{1} \cos(\pi x/2) f(x)dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1),$$

ima maksimalni algebraski stepen tačnosti.

Rešenje. Odredjujemo koeficijente iz sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi} &= \int_{-1}^{1} \cos(\pi x/2) dx = A_0 + A_1 + A_2, \\
0 &= \int_{-1}^{1} x \cos(\pi x/2) dx = -A_0 + A_2, \\
\frac{4(\pi^2 - 8)}{\pi^3} &= \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\pi x/2) dx = A_0 + A_2.
\end{aligned}$$

Rešavanjem sistema nalazimo

$$A_0 = .121, \quad A_1 = 1.032, \quad A_3 = .121.$$

Formula ima algebarski stepen tačnosti tri jer je dodatno

$$0 = \int_{-1}^{1} x^3 \cos(\pi x/2) dx = -A_0 + A_2 = -.121 + .121 = 0.$$

Rešenje pismenog ispita iz Numeričkih metoda, II grupa

1. Ispitati konvergenciju numeričkog reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{(k-1)!+1}{k!}.$$

Rešenje. Kako redovi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k!},$$

konvergiraju po Liebnitzovom kriterijumu, jer opšti članovi redova opadaju $1/k > 1/(k+1)$ i $1/k! > 1/(k+1)! = 1/k!\,1/(k+1)$ i važi $\lim 1/k = 0$ i $\lim 1/k! = 0$, to konvergira i njihov zbir.

2.a Oceniti gornju granicu greške koja može nastati prilikom rešavanja sistema linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} .5 & -.5 \\ .5 & -.50001 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad \frac{||\Delta b||_1}{||b||_1} \le 10^{-5}.$$

Rešenje. Istim postupkom kao u drugom zadatku u grupi I, dobijamo

$$\frac{||\Delta x||_1}{||x||_1} \le 2.$$

2.b Koristeći Gauss-Seidelov metod rešiti sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} -.3 & -.08 & .9 \\ -.15 & 1.05 & -.2 \\ 1.25 & -.3 & -.15 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 1.49 \\ 1.95 \\ -2.075 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Koristeći istu ideju kao u drugom zadataku u grupi I, dobijamo isti sistem linearnih jednačina.

3. Naći Newtonov interpolacioni polinom za skup podataka

	0	1	2	3
x_k	1.	.7	.5	.4
$f(x_k)$	2.1	2.2	1.7	.4

Odrediti približno vrednost funkcije f u tački .6.

Rešenje. Formiramo tablicu konačnih razlika

$$
\begin{array}{llllll}
k & x_k & [x_k;f] & [x_k,x_{k+1};f] & [x_k,x_{k+1},x_{k+2};f] & [x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3};f] \\
0 & 1. & \underline{2.1} & & & \\
 & & & \dfrac{2.1-2.2}{1.-.7} = \underline{-0.3333} & & \\
1 & .7 & 2.2 & & \dfrac{-0.3333-2.5}{1.-.5} = \underline{-5.667} & \\
 & & & \dfrac{2.2-1.7}{.7-.5} = 2.5 & & \dfrac{-5.667.-(-35.)}{1.-.4} = \underline{48.888} \\
2 & .5 & 1.7 & & \dfrac{2.5-13}{.7-.4} = -35. & \\
 & & & \dfrac{1.7-.4}{.5-.4} = 13. & & \\
3 & .4 & .4 & & &
\end{array}
$$

Netnov interpolacioni polinom je

$$P_3(x) = 2.1+(-.3333)(x-1.)+(-5.667)(x-1.)(x-.7)+48.888(x-1.)(x-.7)(x-.5).$$

Vrednost polinoma u tački $x = .6$ iznosi

$$P_3(.6) = 2.202.$$

4. Koristeći metod proste iteracije odrediti bar jedno rešenje jednačine $x = -(x^3+1)/3$ sa relativnom greškom manjom od 10^{-4}.

   Rešenje. Koristeći isti postupak kao u rešenju u grupi I, nalazimo da 6 iteracija uz $x_0 = -.5$, zadovoljava traženi uslov. Rešenje približno iznosi $x_6 = -.32218$

5. Odrediti vrednosti za A_0, A_1 i A_2 tako da kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} \log(1+x) f(x)\, dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1),$$

   ima maksimalni mogući algebarski stepen tačnosti.

   Rešenje. Koristeći isti metod kao u grupi I, nalazimo sistem jednačina

$$
\begin{aligned}
-2+\log 4 &= \int_{-1}^{1} \log(1+x) dx = A_0 + A_1 + A_2, \\
1 &= \int_{-1}^{1} x \log(1+x) dx = -A_0 + A_2, \\
\frac{2}{9}(-4+\log 8) &= \int_{-1}^{1} x^2 \log(1+x) dx = A_0 + A_2.
\end{aligned}
$$

   Rešenje sistema je

$$A_0 = -.713, \quad A_1 = -.187, \quad A_2 = .287.$$

   Formula ima algebarski stepen tačnosti dva.