Машински факултет, Београд

Нумеричке методе - писмени испит - јул 2024.

Група А

1. Испитати конвергенцију реда
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^{n/3}}.$$

2. Гаус-Зајделовом методом (проверити да ли су задовољени услови за њено коришћење) решити систем једначина:
$$\begin{aligned} 1.2x &+ 0.15y - 0.1z = 0.8\\ 0.3x &+ 1.82y + 0.29z = -0.795\\ 0.12x &+ 1.54y + 2.9z = 5.83 \end{aligned}$$
са релативном грешком мањом од 10^{-2}.

3. Њутновом методом наћи решење једначине $e^x = 1-\ln x$ са релативном грешком мањом од 10^{-3}.

4. Користећи први Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама за функцију $f(x)$ дату таблицом

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{5}$	1

израчунати приближно $f(-\frac{3}{7})$.

5. Користећи уопштену Симпсонову формулу са кораком $h=0.1$ наћи приближну вредност интеграла
$$\int_1^2\frac{dx}{\ln(1+x)}$$
и проценити учињену грешку.

Решења

1. Конвергира на основу другог поредбеног критеријума (са редом $\sum\frac{1}{3^n}$).

2. Довољно је спровести три итерације: почетна $(0,0,0)$, прва $(0.667,-0.547,2.273)$, друга $(0.924,-0.951,2.477)$, трећа $(0.992,-0.995,2.498)$. (Тачно решење је $(1,-1,2.5)$.)

3. Решење је $x^*\approx 0.512222$.

4. Први Њутнов полином је
$$\begin{aligned} P^1(x) = {}& 1-1.2\left(x+\frac{1}{2}\right)-0.5142\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)+6.6852\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)\\ &-10.7982\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)x+14.8068\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)x\left(x-\frac{1}{6}\right)\\ &-29.6136\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right);\quad P^1(-3/7)=0.954924. \end{aligned}$$

5. Вредности функције у датим чворовима су редом
$$1.4427, 1.3478, 1.2683, 1.2006, 1.1422, 1.0914, 1.0466, 1.0068,\ 0.9712, 0.9392, 0.9102.$$
Приближна вредност интеграла је 1.118423. Четврти извод функције $\ln^{-1}(1+x)$ је
$$\frac{6\log^3(x+1)+22\log^2(x+1)+36\log(x+1)+24}{(x+1)^4\log^5(x+1)},$$
па се његов максимум на $[1,2]$ може оценити са 38.3. Следи да је грешка мања од 2.2×10^{-5}. (Стварна вредност интеграла је $I\approx 1.11842481454969918803 2...$, па је заправо грешка мања од 1.9×10^{-6}.)