Zadaci (sistemi linearnih jednačina sa parametrom)

1. (Ispit - januar 2015.) U zavisnosti od $k \in \mathbb{R}$ diskutovati rešenja linearnog sistema jednačina:

$$\begin{aligned} kx + 3y &= 1 \\ x + (k-1)y &= 4 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

2. (Ispit - oktobar 2014.) U zavisnosti od $a \in \mathbb{R}$ diskutovati rešenja linearnog sistema jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (2a-1)\,x & + & y & - & az & = & 1-a \\ (a+1)\,x & - & ay & + & (3a+1)\,z & = & a+2 \\ x & & & + & az & = & 3-2a \end{array}$$

3. (Ispit - septembar 2014.) U zavisnosti od $\lambda \in \mathbb{R}$ diskutovati rešenja linearnog sistema jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & -\lambda \\ 3x & + & 3y & + & (\lambda-1)\,z & = & 1 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \end{array}$$

Rešenja

1. Sistem najlakše rešavamo najobičnijom eliminacijom: ako iz prve jednačine izrazimo

$$y = \frac{1-kx}{3}$$

i to uvrstimo u drugu, imamo

$$x + (k-1)\frac{1-kx}{3} = 4, \quad \left(3+k-k^2\right)x = 13-k, \quad x = \frac{13-k}{3+k-k^2}$$

(usput je neophodno prokomentarisati kako ova jednačina po x nema rešenja za $3+k-k^2 = 0$, odnosno $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ s obzirom na to da je tada $13-k \neq 0$) i onda

$$y = \frac{1-kx}{3} = \frac{3-12k}{3\left(3+k-k^2\right)} = \frac{1-4k}{3+k-k^2}$$

Dati sistem se sastoji od 3 jednačine u 2 nepoznate, tj. ima više jednačina nego nepoznatih. Kako je sistem od 2 nepoznate u opštem slučaju odredjen dvema jednačina, sistem poput ovog može biti salglasan samo ako treća jednačina uklapa prve dve, tj. ako je vrednost k takva da se dobijena rešenja po x i y ukpalaju u 3. jednačinu:

$$2\frac{13-k}{3+k-k^2}-\frac{1-4k}{3+k-k^2}=5$$
$$\frac{25+2k}{3+k-k^2}=5, \quad 5k^2-3k+10=0.$$

Dobijena kvadratna jednačina po k nema rešenja ($D=3^2-4\cdot5\cdot10<0$), dakle realan parametar k sa traženim svojstvom ne postoji. Odgovor je da dati sistem nema rešenja ni za jedno realno k.

2. **Prvi način:**

Sistem rešimo koristeći Gausov postupak. Izborom prvog markera

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a & \quad a \\
(a+1)\,x & - & ay & + & (3a+1)\,z & = & a+2 & \leftarrow + \\
x & & & + & az & = & 3-2a &
\end{array}$$

dobijamo sledeći ekvivalentni sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a & \\
(2a^2+1)\,x & & & + & (-a^2+3a+1)\,z & = & -a^2+2a+2 & \leftarrow + \\
\boxed{x} & & & + & az & = & 3-2a & \quad -(2a^2+1)
\end{array}$$

Izborom drugog markera dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
(2a-1)\,x & + & \boxed{y} & - & az & = & 1-a \\
 & & & & (-2a^3-a^2+2a+1)\,z & = & 4a^3-7a^2+4a-1 \\
\boxed{x} & & & + & az & = & 3-2a
\end{array} \tag{1}$$

Sledi da je:

$$z=\frac{4a^3-7a^2+4a-1}{-2a^3-a^2+2a+1} \Rightarrow z=\frac{(a-1)\,(4a^2-3a+1)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{2}$$

Slično je:

$$x=(3-2a)-az \Rightarrow x=\frac{(a-1)\,(a-3)\,(3a+1)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{3}$$

i

$$y=1-a+az-(2a-1)\,x \Rightarrow y=\frac{(a-1)\,(17a^2-3a-4)}{(2a+1)\,(1+a)\,(1-a)} \tag{4}$$

Konačno ako $a\notin\left\{-1,-\frac{1}{2},1\right\}$ sistem ima jedinstveno rešenje. Koristeći mogućnost skraćivanja podizraza $(1-a)$ u (2), (3), (4) rešenje možemo napisati:

$$\mathcal{R}=\left\{\left(\frac{(3-a)(3a+1)}{(2a+1)(1+a)},\frac{-17a^2+3a+4}{(2a+1)(1+a)},\frac{-4a^2+3a-1}{(2a+1)(1+a)}\right)\middle|\, a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,-\frac{1}{2},1\right\}\right\}$$

Ukoliko je $a\in\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$ sistem (1) je protivurečan jer je slobodni član njegove druge jednačine različit od nule. Sledi:

$$\mathcal{R}=\emptyset \text{ za } a\in\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$$

Ukoliko je $a=1$ sistem (1) postaje:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & \boxed{y} & - & z & = & 0\\ & & & & 0z & = & 0\\ \boxed{x} & & & + & z & = & 1 \end{array} \tag{5}$$

Ako je $z=\alpha\in\mathbb{R}$ tada je $x=1-\alpha$ i $y=2\alpha-1$ odakle je:

$$\mathcal{R}=\left\{(1-\alpha,2\alpha-1,\alpha)\,\middle|\, a=1,\alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

Drugi način:

Ukoliko dati sistem rešavamo uz pomoć Kramerovog pravila, dobijamo da su odgovarajuće determinante jednake

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & -a\\ a+1 & -a & 3a+1\\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = -2a^3-a^2+2a+1,\\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 1-a & 1 & -a\\ a+2 & -a & 3a+1\\ 3-2a & 0 & a \end{vmatrix} = 3a^3-11a^2+5a+3,\\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1-a & -a\\ a+1 & a+2 & 3a+1\\ 1 & 3-2a & a \end{vmatrix} = 17a^3-20a^2-a+4,\\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & 1-a\\ a+1 & -a & a+2\\ 1 & 0 & 3-2a \end{vmatrix} = 4a^3-7a^2+4a-1.
\end{aligned}$$

Glavna determinanta Δ je očito jednaka 0 za $a=1$ (kao i sve ostale), te se pri njenoj faktorizaciji može izvući $(a-1)$. Nalazimo $\Delta=(a-1)(-2a^2-3a-1)=(1-a)(2a^2+3a+1)$.

Izraz u drugoj zagradi je jednak 0 za $a = -1$, tako da se dalje može izvući $(a+1)$. Konačno,

$$\Delta = (1-a)(a+1)(2a+1).$$

Striktnu faktorizaciju ostalih determinanti nije ni nužno odmah sprovoditi, jedino što nam je bitno jeste da li je neka od njih deljiva sa $a-1$, $a+1$ ili $2a+1 = 2\left(a+\frac{1}{2}\right)$ (tj. da li je jednaka 0 za $a \in \{1, -1, -\frac{1}{2}\}$) - nije osim što su sve tri deljive sa $(a-1)$. Stoga odmah zaključujemo da u slučajevima $a = -1$ i $a = -\frac{1}{2}$ sistem nema rešenja (čim je glavna determinanta jednaka 0 i pritom bar jedna od pomoćnih različita od 0 - zna se da sistem nema rešenja; u ovim slučajevima su čak sve tri različite od 0). Za $a = 1$ su sve četiri determinate jednake 0 i tu se diskusija mora sprovesti Gausovom metodom eliminacije, što je već uradjeno u prvom rešenju. Za $a \neq \pm 1, -\frac{1}{2}$ opet dobijamo da sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{-3a^2+8a+3}{(2a+1)(a+1)}, \frac{-17a^2+3a+4}{(2a+1)(a+1)}, \frac{-4a^2+3a-1}{(2a+1)(a+1)}\right).$$

Dakle, čak i kada se zadatak radi Kramerovim pravilom, ne može se u potpunosti izbeći Gausov metod eliminacije. Naredni zadatak se ne može rešiti Kramerovom metodom, jer sistem nema jednak broj jednačina i nepoznatih. Stoga je neophodno dobro znati Gausov metod eliminacije

3. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Primenimo sledeće elementarne transformacije, da bi našli $\rho(\Sigma)$.

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -\lambda \\ 3 & \lambda-1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 6 & \lambda-7 & 0 & 10 \\ \lambda+2 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda^2-\lambda+18) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ukoliko je $\lambda = 1$ tada je sistem oblika:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

odakle sledi da je sistem protivurečan odnosno $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$.

Ako je $\lambda \neq 1$ tada je sistem oblika:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda^2-\lambda+18) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & \boxed{\lambda-1} & 0 & 2\lambda+4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(\lambda^2-7\lambda+6) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sledi da je $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$ za $\lambda \notin \{1, 6\}$. Ukoliko je $\lambda = 6$ sistem je oblika:

$$\Sigma \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{-1} & 3 \\ \boxed{3} & -3 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i ima jedinstveno rešenje $\mathcal{R}(\Sigma) = \left\{ \left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}, -\frac{36}{5} \right) \middle| \lambda = 6 \right\}$.

prof. dr Slobodan Radojević,

doc. dr Aleksandar Pejčev,

Mašinski fakultet u Beogradu