Машински факултет, Београд 29.12.2022.

Други колоквијум из Математике 1 - смене 6 и 7

Група А

1. Наћи $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin^4 x)}{(1-\cos 2x)^2}$.

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-3}}$.

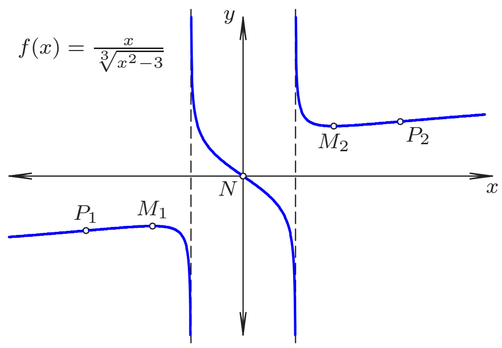
3. Наћи Маклоренов полином трећег степена за функцију $y = \arcsin \frac{x}{1+x}$.

4. Наћи кривину и торзију криве $\alpha(t) = (t, 2t, \ln(t+1))$, као и тачке у којима су оне екстремалне.

Решења.

1. Ако приметимо да је $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, добијамо $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin^4 x)}{4\sin^4 x}$. Даље можемо увести смену $\sin^4 x = t$, $t \to 0$ кад $x \to 0$, па је $L = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1-t)}{4t} = -\dfrac{1}{4}$.

2. Домен функције је $\mathbb{R} \setminus \pm\sqrt{3}$; једина нула функције је тачка $N(0,0)$; дата функција је негативна за $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, а позитивна за $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.



Праве $x = \pm\sqrt{3}$ су вертикалне асимптоте, јер је $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}\pm} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}\pm} f(x) = \pm\infty$. Функција нема других асимптота.

Први извод функције је $f'(x) = \dfrac{x^2-9}{3(x^2-3)^{4/3}}$. Следи да функција расте за $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ а опада за $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$. Тачка $M_1(-3, f(-3))$ је локални максимум функције, а тачка $M_2(3, f(3))$ локални минимум. Други извод је $f''(x) = -\frac{2x(x^2-27)}{9(x^2-3)^{7/3}}$.

Превојне тачке су $N(0,0)$, $P_1(-3\sqrt{3}, f(-3\sqrt{3}))$ и $P_2(3\sqrt{3}, f(3\sqrt{3}))$. Функција је конвексна за $x \in (-\infty, -3\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$, а конкавна за $x \in (-3\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (3\sqrt{3}, \infty)$.

3. Приметимо прво да је $\frac{x}{1+x} = x(1+x)^{-1} = x(1-x+x^2+o(x^2)) = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$ кад $x \to 0$. Нађимо сада Маклоренов полином степена 3 за функцију $g(x) = \arcsin x$: $T_3(x) = g(0) + g'(0)x + g''(0)x^2/2 + g'''(0)x^3/6$. Потребни изводи су $g'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $g''(x) = x(1-x^2)^{-3/2}$, $g'''(x) = (2x^2+1)(1-x^2)^{-5/2}$, па је $g(0) = g''(0) = 0$, $g'(0) = g'''(0) = 1$. Дакле, $T_3(x) = x + x^3/6 + o(x^3)$. Коначно је
$$y = \arcsin(x - x^2 + x^3 + o(x^3)) = x - x^2 + x^3 + \frac{1}{6}(x - x^2 + x^3)^3 + o(x^3) = x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3),$$
па је тражени Маклоренов полином $x - x^2 + 7x^3/6$.

4. Приметимо да је домен дате функције $t > 1$, а њена прва три извода су $\dot\alpha = (1, 2, (t+1)^{-1})$, $\ddot\alpha = (0, 0, -(t+1)^{-2})$, $\dddot\alpha = (0, 0, 2(t+1)^{-3})$. Даље је $\dot\alpha \times \ddot\alpha = (t+1)^{-2}(-2, 1, 0)$ и $[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha] = 0$. Следи да је торзија једнака нули у свакој тачки криве. Да би смо нашли кривину криве, рачунамо $|\dot\alpha| = \sqrt{5 + (t+1)^{-2}}$ и $|\dot\alpha \times \ddot\alpha| = \sqrt{5}(t+1)^{-2}$. Дакле,
$$K = \frac{\sqrt{5}(t+1)}{5((t+1)^2+1)^{3/2}}, \quad K' = -\frac{\sqrt{5}(10t^2+20t+9)}{5((t+1)^2+1)^{5/2}},$$
па је кривина ексремална за $t = -1 + 1/\sqrt{10}$ (друга нула од K' не припада домену функције α).