Машински факултет, Београд 26.12.2022.

Други колоквијум из Математике 1

Група 1

1. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt[3]{x^5+x^3}}{x^2\ln(1-2x)}$.

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

3. Наћи домен, асимптоте, тачке екстремума и испитати монотоност функције $f(x)=5x+\ln\left(\frac{e^x-6}{e^x-1}\right)^2$.

4. Наћи кривину и торзију криве дате векторском функцијом $\vec{r}(t)=(4\cos^3 t, 4\sin^3 t, 3\cos 2t)$ у тачки у којој је $t=\frac{\pi}{3}$.

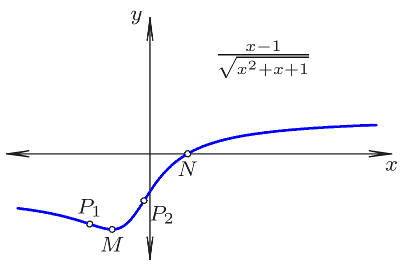
Решења

1. Приметимо прво да бројилац и именилац можемо поделити са x, а затим искористити Маклоренове развоје $\ln(1+t)=t+o(t)$ и $(1+t)^a=1+at+o(t)$ кад $t\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2\ln(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x^2/3+o(x^2))}{x(2x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/3+o(x^2)}{2x^2+o(x^2)}=-\frac{1}{6}.$$

2. Домен функције је цео скуп $\mathbb{R}$; једина нула функције је тачка $(1,0)$; до ње је функција негативна, а надаље је позитивна.

Како је $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\pm 1$, дата функција има хоризонталну асимптоту $y=1$ кад $x\to\infty$, односно $y=-1$ кад $x\to-\infty$. Први и други извод су $y'=\frac{3(x+1)}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$ и $y''=-\frac{3(4x^2+7z+1)}{4(x^2+x+1)^{5/2}}$. Следи да функција има локални минимум у тачки $M(-1,2)$ (до тачке M опада, а од ње расте). Превојне тачке су P_1 за $x=\frac{-7-\sqrt{33}}{8}$ и P_2 за $x=\frac{-7+\sqrt{33}}{8}$ (функција је између њих конвексна, а иначе је конкавна).



3. Домен дате функције је $\mathbb{R}\setminus\{0,\ln 6\}$. Како је $\lim_{x\to 0}f(x)=\infty$ и $\lim_{x\to\ln 6}f(x)=-\infty$, праве $x=0$ и $x=\ln 6$ су вертикалне асимптоте. Даље, права $y=5x$ је коса асимптота. Први извод дате функције је $f'(x)=5\frac{(e^x-2)(e^x-3)}{(e^x-6)(e^x-1)}$. Следи да функција расте за $x\in(-\infty,0)\cup(\ln 2,\ln 3)\cup(\ln 6,\infty)$; опада за $x\in(0,\ln 2)\cup(\ln 3,\ln 6)$. Коначно, за $x=\ln 2$ дата функцкија постиже локални минимум, а за $x=\ln 3$ локални максимум.

4. Рачунамо прва три извода дате векторске функције:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &=(-12\cos^2 t\sin t, 12\sin^2 t\cos t, -6\sin 2t), & \dot{\vec{r}}(\pi/3)&=(-3\sqrt{3}/2, 9/2, -3\sqrt{3}),\\
\ddot{\vec{r}} &=(-12\cos^3 t+24\cos t\sin^2 t, 24\cos^2 t\sin t-12\sin^3 t, -12\cos 2t), & \ddot{\vec{r}}(\pi/3)&=(15/2, -3\sqrt{3}/2, 6),\\
\dddot{\vec{r}} &=(84\cos^2 t\sin t-24\sin^3 t, 24\cos^3 t-84\cos t\sin^2 t, 24\sin 2t), & \dddot{\vec{r}}(\pi/3)&=(3\sqrt{3}/2, -57/2, 12\sqrt{3}),
\end{aligned}$$

а затим потребни векторски и мешовити производ за $t=\pi/3$:

$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}=(27/2, -27\sqrt{3}/2, -27),\quad [\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}}]=81\sqrt{3},$$

Као и норме вектора

$$|\dot{\vec{r}}(\pi/3)|=3\sqrt{6},\quad |\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|=27\sqrt{2}.$$

Дакле,

$$K=\frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}=\frac{1}{6\sqrt{3}},\quad T=\frac{[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}=\frac{1}{6\sqrt{3}}.$$