

## 7 Примене извода

### 7.1 Основне теореме диференцијалног рачуна

**Дефиниција 7.1.** Нека је реална функција  $f$  дефинисана у некој околини тачки  $c$ .

- $c$  је тачка *локалног максимума* функције  $f$  ако постоји  $\delta > 0$  такво да је  $f(c) \geq f(x)$  за све  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ .
- $c$  је тачка *локалног минимума* функције  $f$  ако постоји  $\delta > 0$  такво да је  $f(c) \leq f(x)$  за све  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ .

Тачке локалног максимума и минимума функције  $f$  су *локалне екстремне вредности* те функције.

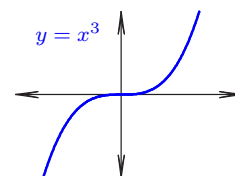
Локалне екстремне вредности су и *глобалне (апсолутне) екстремне вредности* ако одговарајуће неједнакости важе на целом домену функције  $f$  уместо на интервалу  $(c - \delta, c + \delta)$ .

**Дефиниција 7.2.** Нека је  $f$  диференцијабилна функција. Тачка  $x$  за коју је  $f'(x) = 0$  је *стационарна тачка* функције  $f$ .

**Теорема 7.1.** (Фермаова теорема) Нека је  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  функција и  $c \in (a, b)$  тачка локалне екстремне вредности те функције. Ако је  $f$  диференцијабилна у тачки  $c$ , онда је  $f'(c) = 0$ .

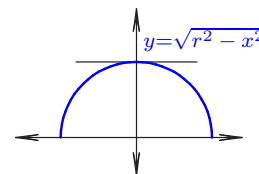
Следи да је услов  $f'(c) = 0$  неопходан да функција диференцијабилна у тачки  $c$  има у тачки  $c$  локалну екстремну вредност. Ипак, тај услов није и довољан.

**Пример 7.1.** За функцију  $y = x^3$  важи  $y'(0) = 0$ , а  $x = 0$  није тачка локалне екстремне вредности функције  $y$ .



**Теорема 7.2.** (Ролова теорема) Нека је функција  $f$  непрекидна на интервалу  $[a, b]$  и диференцијабилна на интервалу  $(a, b)$ . Ако је  $f(a) = f(b)$ , тада постоји бар једна тачка  $c \in (a, b)$  таква да је  $f'(c) = 0$ .

**Пример 7.2.** Посматрајмо функцију  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$ . Дата функција је непрекидна на интервалу  $[-r, r]$  и диференцијабилна на интервалу  $(-r, r)$ . Следи да се може применити Ролова теорема и заиста, постоји  $c \in (-r, r)$  такво да је  $f'(c) = 0$  (тангента је паралелна  $x$ -оси.)



**Теорема 7.3.** (Лагранжова теорема) Нека је функција  $f$  непрекидна на интервалу  $[a, b]$  и диференцијабилна на интервалу  $(a, b)$ . Тада постоји тачка  $c \in (a, b)$  таква да је

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

### 7.2 Интервали монотоности и екстремне вредности функције

**Теорема 7.4.** (Интервали монотоности) Нека је функција  $f(x)$  диференцијабилна на интервалу  $(a, b)$ . Да би функција  $f(x)$  била растућа (опadaјућа) на интервалу  $(a, b)$  неопходно је и довољно да важи  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) за свако  $x \in (a, b)$ .

**Доказ.** Доказ изводимо у случају растуће функције. Покажимо да је услов неопходан. Нека је  $x_0 \in (a, b)$  произвољна тачка. Како је  $f$  растућа функција, важи

$$x \in (a, b), x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \text{и} \quad x \in (a, b), x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Тада је  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$ .

Услов је и довољан. Нека је  $f'(x) \geq 0$  за свако  $x \in (a, b)$ . Ако су  $x_1 < x_2$  две произвољне тачке тог интервала, тада на основу Лагранжове теореме постоји тачка  $c \in (x_1, x_2)$  за коју је  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ . Како је  $f'(c) \geq 0$ , то је  $f(x_2) \geq f(x_1)$ , тј.  $f$  је растућа.  $\square$

**Теорема 7.5.** Нека је функција  $f$  диференцијабилна на интервалу  $(a, b)$  и  $x_0 \in (a, b)$ .

- Ако је  $f'(x_0) > 0$  тада је  $f$  строго растућа у тачки  $x_0$ .
- Ако је  $f'(x_0) < 0$  тада је  $f$  строго опадајућа у тачки  $x_0$ .

**Теорема 7.6.** Нека је функција  $f$  диференцијабилна у некој околини тачке  $x_0$ , осим можда у тачки  $x_0$  у којој је непрекидна. Ако постоји  $\delta > 0$  такво да

- за  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  важи  $f'(x) < 0$  и за  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  важи  $f'(x) > 0$ , тада је  $x_0$  тачка локалног минимума функције  $f$ ;
- за  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  важи  $f'(x) > 0$  и за  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  важи  $f'(x) < 0$ , тада је  $x_0$  тачка локалног максимума функције  $f$ .

**Пример 7.3.** Наћи интервале монотоности и екстремне вредности функције  $y = \frac{e^x + x}{e^x - x}$ .

Функција је дефинисана на целом скупу  $\mathbb{R}$ , јер је  $e^x > x$  за  $x \in \mathbb{R}$ . Први извод је  $y' = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$ . Како је  $e^x > 0$  за  $x \in \mathbb{R}$ , знак првог извода зависи само од  $1 - x$ . Дакле,  $y' > 0$  за  $x < 1$  и ту функција расте;  $y' < 0$  за  $x > 1$  и ту функција опада; тачка  $\left(1, \frac{e+1}{e-1}\right)$  је локални (и глобални) максимум функције.

**Теорема 7.7.** Нека је  $x_0$  стационарна тачка функције  $f$  и нека постоји  $f''(x_0)$ .

- Ако је  $f''(x_0) > 0$  тада је  $x_0$  тачка локалног минимума функције  $f$ .
- Ако је  $f''(x_0) < 0$  тада је  $x_0$  тачка локалног максимума функције  $f$ .

**Пример 7.4.** Наћи екстремне вредности функције  $y = \sin x + \cos x$  за  $x \in [0, 2\pi)$ .

Налазимо  $y' = \cos x - \sin x = 0$  за  $x = \frac{\pi}{4}$  или  $x = \frac{5\pi}{4}$ . Даље је  $y'' = -\sin x - \cos x$  и  $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0$ , па је тачка  $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$  локални максимум функције, а  $y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0$ , па је тачка  $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$  локални минимум функције.

### 7.3 Лопиталово правило

**Теорема 7.8.** (Кошијева теорема о средњој вредности) Нека су функције  $f$  и  $g$  непрекидне на  $[a, b]$ , диференцијабилне на  $(a, b)$  и нека је  $g'(x) \neq 0$  за све  $x \in (a, b)$ . Тада постоји  $\xi \in (a, b)$  за које је

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Теорема 7.9.** (Лопиталово правило) Нека су  $f$  и  $g$  функције,  $a \in [-\infty, \infty]$  и важи

1.  $f$  и  $g$  су диференцијабилне за  $x \neq a$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  (или  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ );
3.  $g'(x) \neq 0$  за  $x \neq a$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ .

Тада је  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

**Пример 7.5.** Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$ .

Нека је  $y = x^x$ . Тада је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[ -\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

Дакле,  $\lim_{x \rightarrow 0+} y = e^0 = 1$ .

**Пример 7.6.** Израчунати  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$ .

Функција под лимесом је облика  $\frac{\infty}{\infty}$ . Примењујемо Лопиталово правило  $n$  пута:

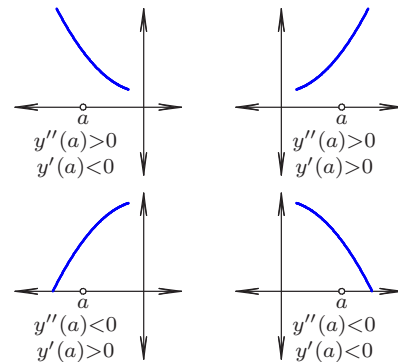
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^n)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(nx^{n-1})'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = n! \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

## 7.4 Конвексност

**Дефиниција 7.3.** Нека је  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  функција,  $x_1, x_2 \in (a, b)$  и  $\lambda \in [0, 1]$ .  $f$  је

- *конвексна* ако важи  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ . Значи да је график функције испод дужи која спаја тачке  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$ .
- *конкавна* ако важи  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ . Значи да је график функције изнад дужи која спаја тачке  $(x_1, f(x_1))$  и  $(x_2, f(x_2))$ .

Претпоставимо да је  $f''(a) > 0$ . То значи да у околини тачке  $a$  (нагиб тангенте)  $f'$  расте - таква крива је конвексна.



Претпоставимо да је  $f''(a) < 0$ . То значи да у околини тачке  $a$  (нагиб тангенте)  $f'$  опада - таква крива је конкавна.

**Теорема 7.10.** Нека функција  $f$  има други извод на  $(a, b)$ . Тада за  $x \in (a, b)$  важи

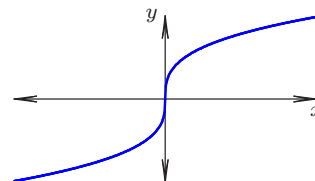
- $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  је конвексна;
- $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$  је конкавна;
- $f''(x) > 0 \Rightarrow f$  је строго конвексна;
- $f''(x) < 0 \Rightarrow f$  је строго конкавна.

**Дефиниција 7.4.** Нека је функција  $f$  непрекидна у тачки  $x_0$  и има коначан или бесконачан извод  $f'(x_0)$ . Ако постоји  $\delta > 0$  такво да је на једном од интервала  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  функција  $f$  строго конвексна а на другом строго конкавна, тада тачку  $(x_0, f(x_0))$  зовемо *превојном тачком* функције  $f$ .

Претпоставимо још да функција  $f$  има други извод  $f''$  у некој околини тачке  $x_0$  осим можда у самој тачки  $x_0$ . Ако  $f''$  мења знак пролазећи кроз тачку  $x_0$ , тада је  $x_0$  превојна тачка функције  $f$ .

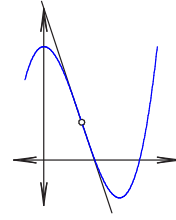
**Пример 7.7.** Посматрајмо функцију  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

Већ смо видели да она има бесконачан први извод у нули, јер је  $f'(x) = x^{-2/3}/3$ . Даље је  $f''(x) = -2x^{-5/3}/9$ . За  $x < 0$  је  $f''(x) > 0$  и ту је функција строго конвексна, док је за  $x > 0$  је  $f''(x) < 0$  и ту је функција строго конкавна. Дакле, нула је превојна тачка функције  $f$ .



**Теорема 7.11.** Ако за функцију  $f$  постоји други извод у тачки  $x_0$  и ако је  $x_0$  превојна тачка функције  $f$ , тада је  $f''(x_0) = 0$ .

**Пример 7.8.** Нека је дата функција  $y = x^3 - 3x^2 + 3$ . Налазимо  $y' = 3x^2 - 6x$  и  $y'' = 6x - 6$ , па је  $y'' = 0$  за  $x = 1$  и ту  $f''$  мења знак. Дакле, тачка  $(1, 1)$  је превојна у тачка функције  $f$  (у тој тачки се крива и њена тангента секу).



## 7.5 Задаци

**Пример 7.9.** Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ .

Узастопном применом Лопиталовог правила рачунамо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-1/2} - (1+x^2)^{-1}}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) + (1+x^2)^{-2}2x}{6x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 7.10.** Израчунати  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$ .

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos x} \right)^{1/\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \ln \frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Применом Лопиталовог правила на последњи лимес добијамо

$$e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x / \cos x}{2 \operatorname{tg} x / \cos^2 x}} = \sqrt{e}.$$

**Пример 7.11.** Испитати ток и скицирати график функције  $y = (2x - 1)e^{-1/x}$ .

Домен је  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; нула функције је  $N(1/2, 0)$ ;  $y < 0$  за  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$  и  $y > 0$  за  $x \in (1/2, \infty)$ . Права  $x = 0$  је вертикална асимптота са леве стране, јер је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = -\infty.$$

Кад  $x \rightarrow \pm\infty$  можемо користити Маколренов развој  $e^t = 1 + t + o(t)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x - 1)e^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x - 1) \left( 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x - 3 + o(1)),$$

па је права  $y = 2x - 3$  коса асимптота кад  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Даље је  $y'(x) = e^{-1/x} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^2}$ .

- $y \nearrow$  за  $x \in (-\infty, -(1 + \sqrt{3})/2) \cup ((\sqrt{3} - 1)/2, \infty)$ ;
- $y \searrow$  за  $x \in (-(1 + \sqrt{3})/2, 0) \cup (0, (\sqrt{3} - 1)/2)$ .

Тачка  $(-(1 + \sqrt{3})/2, y(-(1 + \sqrt{3})/2))$  је локални максимум функције, а тачка  $((\sqrt{3} - 1)/2, y((\sqrt{3} - 1)/2))$  је локални минимум функције. Други извод је  $y'' = e^{-1/x} \frac{4x - 1}{x^4}$ , па је  $y$  конкавна за  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/4)$  и конвексна за  $x \in (1/4, \infty)$ . Функција има превој у тачки  $(1/4, y(1/4))$ .

