1. Osnovne raspodele funkcije gustine otkaza

Funkcija pouzdanosti i funkcija intenziteta otkaza su jedinstveni, tj. određenoj funkciji pouzdanosti odgovara samo određena funkcija intenziteta otkaza i obrnuto. U ovom odeljku će biti date funkcije gustine otkaza koje se najčešće koriste u proučavanju pouzdanosti, zajedno sa funkcijom pouzdanosti i funkcijom intenziteta otkaza koje se na njih odnose.

1.1 Eksponencijalna raspodela

Eksponencijalna funkcija raspodele je jednoparametarska raspodela. U slučaju eksponencijalne raspodele funkcije gustine otkaza, Slika 1.1, funkcija intenziteta otkaza ne zavisi od vremena, već ima konstantnu vrednost:

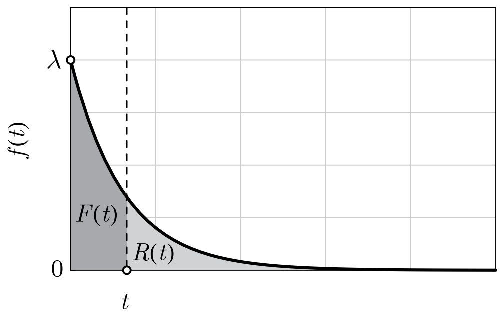
$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \tag{1.1}$$

gde je:

$\lambda(t)$ – intenzitet otkaza ($\lambda > 0$),

t – vreme ($t > 0$),

e – osnova prirodnog logaritma ($e \approx 2,71828\ 18284\ 59045\ldots$).

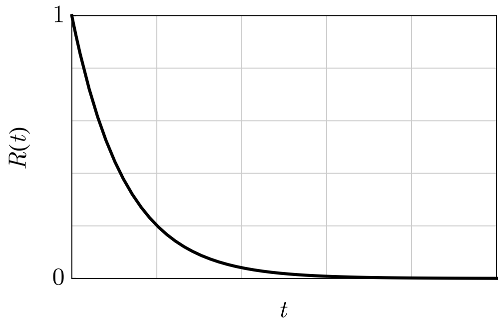


Slika 1.1: Funkcija gustine otkaza

U odnosu na opšti oblik funkcije intenziteta otkaza, Slika **??**, kod eksponencijalne raspodele funkcija $\lambda(t)$ ima izraženu samo drugu oblast (oblast slučajnih otkaza). Saglasno ovome, eksponencijalna raspodela se može primeniti kod mašinskih konstrukcija ili elemenata kod kojih se, zahvaljujući visokoj kontroli, nakon ispitivanja i uhodavanja svi elementi sa greškama i propustima odbacuju, tako da se u eksploatacionim uslovima ne pojavljuju "dečije bolesti" na početku radnog veka (oblast 1).

Funkcija pouzdanosti

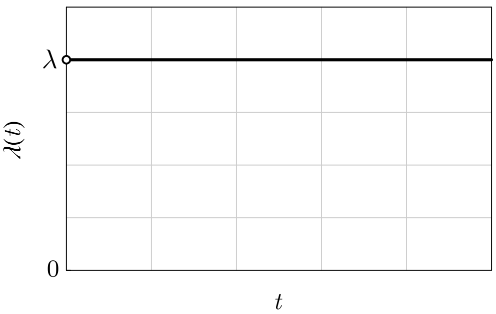
$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda \cdot t} \tag{1.2}$$



Slika 1.2: Funkcija pouzdanosti

Funkcija intenziteta otkaza

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{e^{-\lambda \cdot t}} = \lambda = const. \tag{1.3}$$



Slika 1.3: Funkcija intenziteta otkaza

Ovom raspodelom se dobro opisuju iznenadni slučajni otkazi (oblast 2 na opštem dijagramu intenziteta otkaza). Otkazi koji nastaju zbog istrošenosti (starenja) ne mogu se opisati eksponencijalnim raspodelama. Ova raspodela se može prihvatiti kod elemenata koji radni vek završavaju pre nego što nastupi period istrošenosti (starenja).

Srednje vreme bezotkaznog rada

$$\begin{gathered} m(t) = \int\limits_{0}^{\infty} R(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda \cdot t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \frac{1}{m} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i} \end{gathered} \tag{1.4}$$

1.2 Normalna raspodela

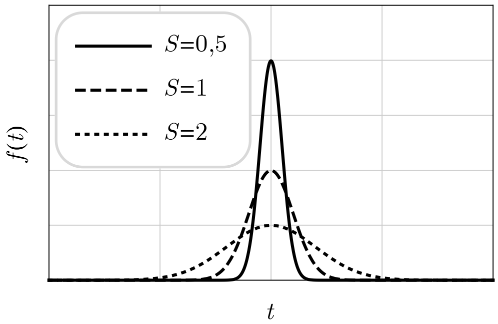
Normalna (Gausova) raspodela je dvoparametarska raspodela koja ima široku primenu u mašinstvu i tehnici generalno. Simetrična je u odnosu na srednju vrednost, Slika 1.4. Izraz za funkciju gustine raspodele ima sledeći oblik:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S} e^{-0{,}5\left(\frac{m-t}{S}\right)^2} \tag{1.5}$$

gde je:

S – standardna devijacija ($S > 0$),

m – srednje vreme bezotkaznog rada ($m > 0$).



Slika 1.4: Uticaj standardne devijacije na funkciju gustine raspodele

Srednje vreme bezotkaznog rada izračunava se prema sledećem izrazu:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} \tag{1.6}$$

Matematičko očekivanje, tj. očekivana srednja vrednost slučajne veličine ne može da opiše u potpunosti slučajnu veličinu u pogledu rasipanja njenih vrednosti oko srednje vrednosti m. Mera rasipanja vrednosti slučajne veličine oko očekivane srednje vrednosti procenjuje se disperzijom slučajne veličine D (očekivanje kvadrata odstupanja slučajne veličine od njene srednje vrednosti):

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - m\right)^2 \tag{1.7}$$

Da bi mera rasipanja slučajne veličine dimenziono bila ista kao i sama slučajna veličina, uvodi se veličina srednje kvadratno odstupanje S tj. standardno odstupanje ili standardna devijacija:

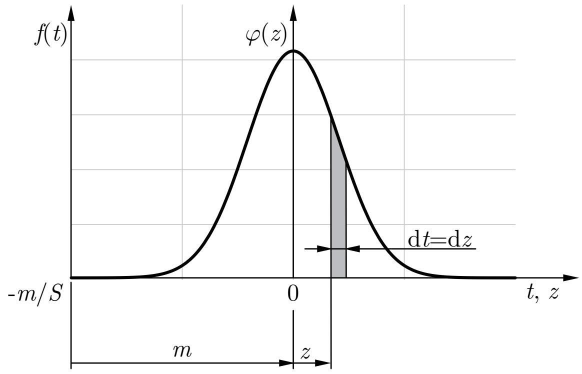
$$S^2 = \frac{D(t)}{n-1} \tag{1.8}$$

Ona definiše oblik funkcije gustine otkaza (Slika 1.4), tj. rasipanje slučajne veličine oko srednje vrednosti. Za određivanje pouzdanosti ne koristi se navedeni oblik funkcije gustine otkaza $f(t)$, jer se integral ove funkcije ne može odrediti u konačnom obliku:

$$R(t) = \int_{t}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.9}$$

Zbog toga se izvodi standardizovana normalna raspodela $\varphi(z)$, Slika 1.5, za koju postoje vrednosti u tabelama o površini ispod gustine otkaza za sve oblike normalne raspodele. Iz uslova da su površine ispod funkcija $f(t)$ i $\varphi(z)$ iste sledi jednakost:

$$f(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(z)\,\mathrm{d}z \Rightarrow \varphi(z) = \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} \tag{1.10}$$



Slika 1.5: Određivanje površine ispod standardizovane krive

Na osnovu smene:

$$z = \frac{t-m}{S} \tag{1.11}$$

i posle diferenciranja sledi:

$$\mathrm{d}t = S\,\mathrm{d}z \tag{1.12}$$

Zamenom u izraz (1.10) dobija se:

$$\varphi(z) = S \cdot f(t) = S \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S} e^{-0{,}5z^2} \tag{1.13}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} &\text{za} \qquad t = 0 \rightarrow z = -\frac{m}{S} \\ &\text{za} \qquad t = m \rightarrow z = 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Površina ispod standardizovane krive tj. kumulativna funkcija raspodele:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-0{,}5z^2}\,\mathrm{d}z \tag{1.15}$$

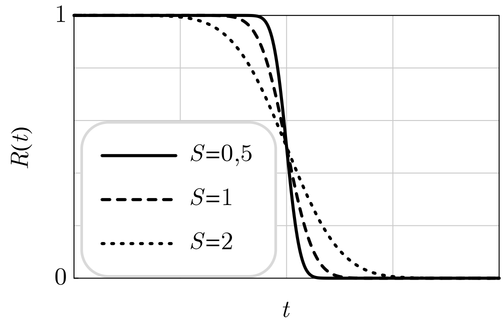
Vrednosti funkcije $F(z)$ date su tabelarno u funkciji od z.

Funkcija pouzdanosti

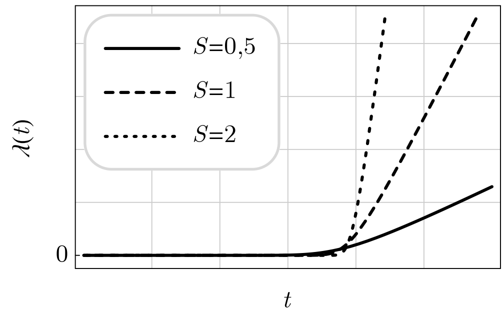
$$R(t) = \int_{t}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{z}^{\infty} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = 1 - F(z) \tag{1.16}$$

Funkcija intenziteta otkaza

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\varphi(z)}{S \cdot R(t)} \tag{1.17}$$



Slika 1.6: Uticaj standardne devijacije na funkciju pouzdanosti



Slika 1.7: Uticaj standardne devijacije na funkciju intenziteta otkaza

Normalna raspodela predstavlja dobar model za opisivanje komponenti koje su izložene habanju tj. postepenom starenju. Normalnom raspodelom se opisuju stvarne mere mašinskih delova u serijskoj proizvodnji, zatim i zazori i preklopi kod spojeva mašinskih delova, kao i mehaničke karakteristike materijala.

1.3 Vejbulova raspodela

Vejbulova[1] raspodela je troparametarska raspodela, i predstavlja najprimenjeniju raspodelu kod velikog broja mašinskih elemenata i delova. Funkcija gustine otkaza za Vejbulovu raspodelu glasi:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{1.18}$$

gde je:

β – parametar oblika ($\beta > 0$),

γ – parametar položaja ($\gamma \gtreqless 0$),

η – parametar razmere ($\eta > 0$).

Oblik funkcije $f(t)$ zavisi od vrednosti parametara γ, β i η. Zavisno od vrednosti ovih parametara, funkcija može preći u eksponencijalnu raspodelu, za $\gamma = 0$ i $\beta = 1$. U tom slučaju je parametar $\lambda = \frac{1}{\eta}$. Za $\beta \geq 3$, Vejbulova raspodela se približava normalnoj raspodeli. Negativne vrednosti parametra $\gamma < 0$, ukazuju na mogućnost otkaza delova sistema pre njegove upotrebe tj. kada je uskladišten. Ovi otkazi su posledica stajanja i lošeg skladištenja. Znači, otkazi mogu nastati i u uslovima kada mašinski sistem ne radi, kada je uskladišten (kao nov proizvod) ili pri dužim zastojima (npt. tokom transporta). U takvim uslovima najranije otkazuju (gube radnu sposobnost) gumeni delovi, na primer zaptivke, što dovodi do otkaza pneumatskih i hidrauličnih komponenti

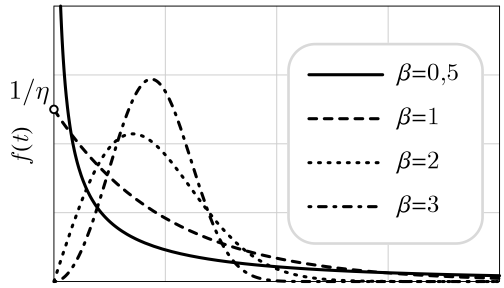
[1] *Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1887-1979.)* je bio švedski inženjer, naučnik i matematičar. Vejbul je 1939. godine objavio rad o raspodeli verovatnoće, koji je od istorijskog značaja za teoriju verovatnoće i statistike. Vejbulova raspodela je prihvaćena od šire stručne i naučne javnosti, i postala je u svetu najpopularnija raspodela verovatnoće za analizu radnog veka sistema, i to ne samo mašinskih, tj. tehničkih već i fizičkih, bioloških i dr.

kada sistem ne radi. Takođe, vlažna sredina utiče na formiranje korozije i smanjenje pokretljivosti delova i spojeva. Pri transportu novih mašinskih konstrukcija vozom ili kamionom mogu nastati oštećenja u vidu *fretinga*[2].

Kada je $\gamma = 0$ (najčešći slučaj), Vejbulova raspodela se svodi na dvoparametarsku raspodelu:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta - 1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{1.19}$$

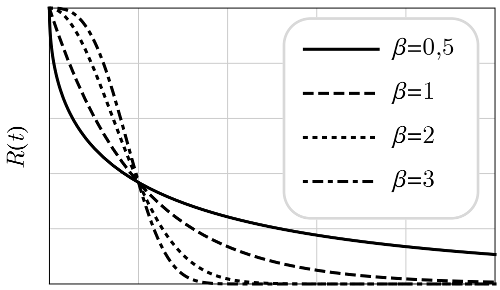
koja je lakša za primenu i analizu. U ovom kursu koristiće se isključivo dvoparametarska Vejbulova raspodela.



Slika 1.8: Uticaj parametra β na oblik funkcije gustine raspodele ($\gamma = 0$, $\eta = const.$)

Funkcija pouzdanosti

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{1.20}$$



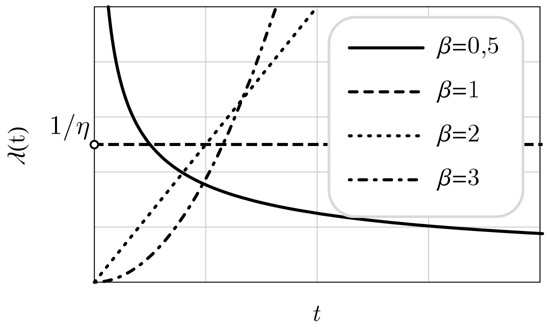
Slika 1.9: Uticaj parametra β na oblik funkcije pouzdanosti ($\gamma = 0$, $\eta = const.$)

Funkcija intenziteta otkaza

Kada je $\beta = 1$, intenzitet otkaza ne zavisi od vremena tj. funkcija $f(t)$ ima eksponencijalnu raspodelu.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta} \tag{1.21}$$

[2]Proces habanja koji se javlja u zoni kontakta dva tela koja se oscilatorno kreću sa malim amplitudama.



Slika 1.10: Uticaj parametra β na oblik funkcije intenziteta otkaza ($\gamma = 0$, $\eta = const.$)

Srednje vreme bezotkaznog rada

$$m = \gamma + \eta \cdot \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \tag{1.22}$$

gde je $\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$ tzv. gama funkcija od $\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$.

Vejbulova raspodela i pored svoje složenosti ima veliki domen primene zbog mogućnosti opisivanja različitih oblika otkaza: ranih, slučajnih i otkaza usled istrošenosti. Dok je primena eksponencijalne raspodele ograničena zbog pretpostavke o konstantnoj vrednosti intenziteta otkaza, dotle Vejbulova raspodela može da uključi opadajuće, konstantne i rastuće funkcije intenziteta otkaza. Kako mnogi otkazi u praktičnim situacijama, naročito u slučajevima mašinskih konstrukcija, pokazuju rastuću tendenciju u toku vremena, primena Vejbulove raspodele, omogućuje razmatranje oblika ovakvih otkaza. Ova raspodela je nastala tako što je švedski naučnik Vejbul ispitivao dinamičku izdržljivost epruveta. Na osnovu statističke analize uvideo je da se normalna raspodela ne poklapa najbolje sa dobijenim rezultatima ispitivanja, pa je uveo novu raspodelu, koja nosi njegovo ime.

Korišćena literatura

1. Vujanović N. (1990) **Teorija pouzdanosti tehničkih sistema**, Vojnoizdavački i novinski centar;
2. Ristivojević M. (2022) **Pouzdanost konstrukcija**, izvodi sa predavanja;
3. Ognjanović M. (2007) **Razvoj i dizajn mašina**, Mašinski fakultet Beograd;
4. Ivanović G. (1987) **Pouzdanost tehničkih sistema – zbirka rešenih zadataka**, Mašinski fakultet Beograd;
5. Ramović R. (2005) **Pouzdanost sistema – elektronskih, telekomunikacionih i informacionih**, Elektrotehnički fakultet Beograd;
6. Milčić D. (2005) **Pouzdanost mašinskih sistema**, Mašinski fakultet Niš;
7. Bertsche B. (2008) **Reliability in Automotive and Mechanical Engineering**, Inst. Maschinenelemente Universitat Stuttgart;
8. Kecicoglu D. (2003) **Robust Engineering: Design-By-Reliability**, Department of Aerospace and Mechanical Engineering The University of Arizona;