Рада Мутавџић Ђукић

6 Интерполација функција - део 1

6.1 Општи задатак интерполације

Претпоставимо да су познате вредности $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ неке функције $y = f(x)$, где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, а није познат аналитички облик функције f или је јако компликован. Потребно је израчунати $f(x)$ за $x \neq x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Ако је потребно наћи вредност $f(x)$ за неко

- $x_0 < x < x_n$ $(x \neq x_i)$, онда се тај задатак зове *интерполација*, а ако је
- $x < x_0$ или $x > x_n$, онда се задатак зове *екстраполација*.

Како се оба задатка решавају на исти начин, за случаја ћемо користити термин интерполација.

Задатак интерполације је на основу таблице познатих вредности

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

наћи једноставију функцију F која се поклапа са датим вредностима функције f у тачкама x_i, тј. $F(x_i) = f(x_i)$, а помоћу које ћемо приближно налазити вредности $f(x) \approx F(x)$ за $x \neq x_i$. Овај задатак може имати јединствено решење, коначно или бесконачно много решења, или немати решење.

Природно је захтевати и да *интерполациона функција* F

- добро апроскимира функцију f у осталим тачкама $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$, тј. да важи $|F(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$,
- буде што једноставнија за рачунање.

Нека су фунције $g_0, g_1, \ldots, g_n$ линеарно независне задате функције (ми ћемо бирати степене функције $g_k = x^k$, а други уобичајен избор су тригонометријске функције $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$).

Интерполациону функцију F тражимо у облику уопштеног интерполационог полинома

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x),$$

где су $a_0, a_1, \ldots, a_n$ неодређени коефицијенти. Из услова интерполације $F(x_i) = f(x_i)$ добијамо систем $n+1$ једначина за одређивање коефицијената a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Ако је детерминанта система

$$D(g) = \begin{vmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

онда су коефицијенти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ једнозначно одређени, па је једнозначно одређена интерполациона функција F.

Бирањем $g_i = x^i$ интерполациона функција добија облик $F(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, где се коефицијенти добијају из система једначина

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n, \end{aligned}$$

чија је детерминанта (Вандермондова)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant m < k \leqslant n} (x_k - x_m) \neq 0,$$

јер су чворови међусобно различити. Дакле, интерполациони полином постоји и јединствен је, али постоји много форми записивања тог полинома.

Посматрајмо сада проблем оцене грешке апроксимације $f(x) \approx P_n(x)$.

Теорема 6.1. (Вајерштрасова теорема) Нека је f непрекидна функција дефинисана на интервалу $[a, b]$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји полином P_n такав да за свако $x \in [a, b]$ важи $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Приликом интерполације функција важна су следећа питања.

1. Формирање интерполационог полинома за дати избор функција $g_0, g_1, \ldots, g_n$.
2. Налажење оцене грешке апроксимације.
3. Оптималан избор чворова да би се минимизовла грешка.
4. Анализа утицаја грешака приближних вредности функције у чворовима.
5. Испитивање конвергенције низа интерполационих полинома ка функцији $f(x)$.

6.2 Лагранжов интерполациони полином

Нека су дати чворови $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ и вредности функције $y_i = f(x_i)$ у тим чворовима. Треба конструисати интерполациони полином $L_n(x)$ такав да је $L_n(x_i) = y_i$. Формирајмо помоћни полином

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

где је δ_{ij} Кронекеров симбол. Дакле, полином p_i се анулира у тачкама $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, па је за неку константу C_i

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n).$$

За $x = x_i$ добијамо

$$1 = p_i(x_i) = C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n),$$

одакле је

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Следи да је

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

па тражени интерполациони полином има облик

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y_i, \quad \text{тј.} \quad L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} y_i$$

и представља *Лагранжов интерполациони полином* и степена је највише n. Можемо га записати и у краћем облику. Ако уведемо ознаку $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, тада је

$$L_n(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

Да бисмо доказали јединственост Лагранжовог полинома, претпоставимо супротно, тј. да је $\tilde{L}_n$ полином различит од полинома L_n степена највише n који такође интерполира функцију f у чворовима x_i ($\tilde{L}_n(x_i) = y_i$). Тада полином $Q_n(x) = L_n(x) - \tilde{L}_n(x)$ има степен највише n и $n + 1$ нулу $x_0, x_1, \ldots, x_n$, па мора бити $Q_n = 0$, тј. $L_n \equiv \tilde{L}_n$.

Пример 6.1. Функција $f(x)$ је задата табелом

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	4	13	73

Наћи Лагранжов интерполациони полином $L_3(x)$ и помоћу њега израчунати приближну вредност $f(3)$.

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} \cdot 4 + \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} \cdot 13$$
$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \cdot 73 = x^3 + 2x + 1,$$

$f(3) \approx L_3(3) = 34.$

6.3 Оцена грешке интерполације

У тачкама различитим од x_i (ако f није полином степена не већег од n) постојаће грешка интерполације (грешка методе),

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x).$$

Како су вредности y_i приближне, јавља се допунска грешка (неотклоњива), а приликом рачунања јавља се и грешка заокруживања. Размотримо оцену грешке методе (оцену остатка интерполације).

Пођимо од помоћне функције

$$F(z) = f(z) - L_n(z) - \frac{\omega(z)}{\omega(x)} \cdot R_n(x),$$

где је z реална променљива, а $x \in [x_0, x_n]$, $x \neq x_i$ фиксирана вредност. Ако претпоставимо да је $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$, тада је $F \in C^{n+1}[x_0, x_n]$. Поред тога, F се анулира у $n+2$ тачке $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ које одређују $n+1$ подсегмент сегмента $[x_0, x_n]$. Ако на сваком од њих применимо Ролову теорему, закључујемо да функција $F'(z)$ има најмање $n+1$ нулу на $[x_0, x_n]$. Даље, применом Ролове теореме на редом функције $F'(z), F''(z), \ldots, F^{(n+1)}(z)$ закључујемо да $F^{(n+1)}(z)$ има бар једну нулу $\eta \in [x_0, x_n]$, $F^{(n+1)}(\eta) = 0$. Ако приметимо још да је

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}[(z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_n)] = (n+1)!,$$

добијамо

$$F^{n+1}(z) = f^{n+1}(z) = \frac{(n+1)!}{\omega(x)} R_n(x),$$

одакле за $z = \eta$ следи

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}\omega(x).$$

Коначно, ако је

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n} |f^{n+1}(x)| \leqslant M_{n+1} \quad \text{(што је у пракси немогуће или тешко проверити)},$$

важи

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

7 Интерполација функција - део 2

7.1 Коначне разлике функција

Нека је дата мрежа еквидистантних чворова $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и нека су познате вредности функције у тим чворовима $y_i = f(x_i)$.

- *Коначне разлике првог реда* су $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.
- *Коначне разлике другог реда* су $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$.
- *Коначне разлике n-тог реда* су $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

Наводимо неке особине коначних разлика.

1. Ако је $f(x) = u(x) + v(x)$, тада је $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$,
2. Ако је $f(x) = c \cdot u(x)$, тада је $\Delta(cu) = c\Delta u$,
3. $\Delta^m(\Delta^n f) = \Delta^{m+n} f = \Delta^n(\Delta^m f)$,
4. Ако је $f(x) = P_n(x)$ полином n-тог степена, тада је ΔP_n полином $n-1$-вог степена.

За доказ особине 4. нека је $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Тада је

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) = a_n(x+h)^n + \cdots + a_1(x+h) + a_0 - (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Следи да су n-те разлике полинома n-тог степена константне, а разлике вишег реда од n су једнаке нули.

Теорема 7.1. Ако је $f \in C^n[x_i, x_{i+n}]$, онда постоји тачка $\eta \in (x_i, x_{i+n})$ таква да је

$$\Delta^n f_i = \Delta^n y_i = h^n f^{(n)}(\eta).$$

Доказ се спроводи математичком индукцијом. Приметимо да за $n = 1$ резултат следи из теореме о средњој вредности, $\Delta y_i = h \cdot f'(\eta)$, $\eta \in (x_i, x_{i+1})$.

На основу претходне теореме имамо приближну једнакост

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

Коначне разлике се могу представити и у таблици коначних разлика, нпр. за $n = 4$:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Пример 7.1. Саставити дијагоналну таблицу коначних разлика за функцију $f(x) = x^3 + 8x + 5$ на интервалу $[0, 1]$ са кораком $h = 0.2$. Вредности функције рачунати са тачношћу $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	5.0000			
		1.6080		
0.2	6.6080		0.0480	
		1.6560		0.0480
0.4	8.2640		0.0960	
		1.7520		0.0480
0.6	10.0160		0.1440	
		1.896		0.0480
0.8	11.9120		0.1920	
		2.0880		
1	14.0000			

Приликом састављања таблица коначних разлика, може се уочити законистост простирања омашке. Претпоставимо да је уместо вредности функције y_i омашком узета вредност $y_i+\varepsilon$ и посматрајмо простирање те омашке у таблици коначних разлика.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_{i-4}	y_{i-4}				
		Δy_{i-3}			
x_{i-3}	y_{i-3}		$\Delta^2 y_{i-4}$		
		Δy_{i-2}		$\Delta^3 y_{i-4}$	
x_{i-2}	y_{i-2}		$\Delta^2 y_{i-3}$		$\Delta^4 y_{i-4}+\varepsilon$
		Δy_{i-1}		$\Delta^3 y_{i-3}+\varepsilon$	
x_{i-1}	y_{i-1}		$\Delta^2 y_{i-2}+\varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-3}-4\varepsilon$
		$\Delta y_i+\varepsilon$		$\Delta^3 y_{i-2}-3\varepsilon$	
x_i	$y_i+\varepsilon$		$\Delta^2 y_{i-1}+2\varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-2}+6\varepsilon$
		$\Delta y_i-\varepsilon$		$\Delta^3 y_{i-1}+3\varepsilon$	
x_{i+1}	y_{i+1}		$\Delta^2 y_i+\varepsilon$		$\Delta^4 y_{i-1}-3\varepsilon$
		Δy_{i+1}		$\Delta^3 y_i-\varepsilon$	
x_{i+2}	y_{i+2}		$\Delta^2 y_{i+1}$		$\Delta^4 y_i+\varepsilon$
		Δy_{i+2}		$\Delta^3 y_{i+1}$	
x_{i+3}	y_{i+3}		$\Delta^2 y_{i+2}$		
		Δy_{i+3}			
x_{i+4}	y_{i+4}				

Приметимо да су коефицијенти уз ε у колони $\Delta^k y$ биномни коефицијенти бинома $(a-b)^k$ и да је у колонама парних разлика највећи утицај омашке у оном реду у коме је омашка настала. Ако се уз то искористи и чињеница да се очекује да разлике довољно високог реда буду јако сличне, омашка се може открити, израчунати и одклонити.

Претпоставимо сада да је горња граница апсолутне грешке израчунатих вредности функције $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-k}$. Онда је горња граница апсолутних грешака коначних разлика:

- првог реда: $\frac{1}{2}\cdot 10^{-k}+\frac{1}{2}\cdot 10^{-k}=10^{-k}$,
- другог реда: $10^{-k}+10^{-k}=2\cdot 10^{-k}$
- n-тог реда: $2^{n-1}\cdot 10^{-k}$,

па је утицај почетних разлика све већи (а коначне разлике су све мање). Ако се догоди за неку вредност y_i важи

$$|\Delta^n y_i| \leqslant 2^{n-1}\cdot 10^{-k},$$

тј. коначна разлика n-тог реда је мања од максимално могуће грешке те разлике, онда су таблице коначних разлика од тог реда па надаље некоректне и не могу се користити.

7.2 Први Њутнов интерполациони полином

Нека су $y_i = f(x_i)$ задате вредности функције у еквидистантним чворовима x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Треба наћи интерполациони полином $P_n(x)$ који задовољава услове

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Потражимо интерполациони полином у облику

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

За $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ редом добијамо

$$\begin{aligned} x = x_0 :& \quad y_0 = a_0, \\ x = x_1 :& \quad y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}, \\ x = x_2 :& \quad y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x - x_1), \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}. \end{aligned}$$

Аналогно добијамо

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n},$$

одакле добијамо *први Њутнов интерполациони полином* (са коначним разликама за еквидистантне чворове):

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Ако уведемо смену $\frac{x-x_0}{h} = u$ добијамо

$$P_n(x_0 + hu) = P_n(u) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}u(u-1) + \cdots \frac{\Delta^n y_0}{n!}u(u-1)\cdots(u-n+1),$$

или

$$P_n(u) = \binom{u}{0}\Delta^0 y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \cdots + \binom{u}{n}\Delta^n y_0.$$

Овај полином је погодно користити око тачке $x = x_0$.

Грешка првог Њутновог полинома се добија из опште формуле за грешку интерполације

$$R_n(u) = \frac{h^{n+1} f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}u(u-1)\ldots(u-n) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}u(u-1)\ldots(u-n), \quad \eta \in (x_0, x_n).$$

7.3 Други Њутнов интерполациони полином

Ако интерполациони полином тражимо у облику

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1).$$

За $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ редом добијамо

$$\begin{aligned} x = x_n :& \quad y_n = a_0, \\ x = x_{n-1} :& \quad y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n), \quad a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}. \end{aligned}$$

Аналогно добијамо

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n},$$

одакле добијамо *други Њутнов интерполациони полином* (са коначним разликама за еквидистантне чворове):

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1).$$

Ако уведемо смену $\frac{x-x_n}{h} = v$ добијамо

$$P_n(v) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}v + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}v(v+1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}v(v+1)\cdots(v+n-1).$$

Овај полином је погодно користити око тачке $x = x_n$.

Грешка првог Њутновог полинома се добија из опште формуле за грешку интерполације

$$R_n(v) = \frac{h^{n+1} f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}v(v+1)\dots(v+n) \approx \frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}v(v+1)\dots(v+n), \quad \eta \in (x_0, x_n).$$

7.4 Подељене разлике

Предпоставимо да чворови $x_0, x_1, \dots, x_n$ у којима је дата функција y нису једнако размакнути.

Подељене разлике првог реда су:

$$\delta(x_i, x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Користе се и следеће ознаке

$$\delta(x_i, x_{i+1}) = \delta^1 = f[x_i, x_{i+1}] = [x_i, x_{i+1}] = [x_i, x_{i+1}; f].$$

Подељене разлике другог реда су:

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{\delta(x_{i+1}, x_{i+2}) - \delta(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2.$$

Користе се и следеће ознаке

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \delta^2 = f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f].$$

Уопште, *подељене разлике k-тог реда су*

$$\delta(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{\delta(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) - \delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-k.$$

Користе се и следеће ознаке

$$\delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \delta^k = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; f].$$

Подељене разлике је, као и коначне, прегледно записати у таблици.

x	y	δ^1	δ^2	$\cdots$	δ^n
x_0	y_0				
		$\delta(x_0, x_1)$			
x_1	y_1		$\delta(x_0, x_1, x_2)$		
		$\delta(x_1, x_2)$			
x_2	y_2		$\delta(x_1, x_2, x_3)$		
		$\delta(x_2, x_3)$			
x_3	y_3		$\delta(x_2, x_3, x_4)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$
x_{n-3}	y_{n-3}		$\delta(x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2})$		
		$\delta(x_{n-3}, x_{n-2})$			
x_{n-2}	y_{n-2}		$\delta(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})$		
		$\delta(x_{n-2}, x_{n-1})$			
x_{n-1}	y_{n-1}		$\delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		
		$\delta(x_{n-1}, x_n)$			
x_n	y_n				

Подељене разлике су симетричне функције својих аргумената:

$$\delta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \delta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = \delta(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) = \delta(x_3, x_2, x_1, \ldots, x_n) = \cdots .$$

Подељене разлике имају и следеће особине:

1. Подељене разлике збира једнаке су збиру подељених разлика сабирака.
2. Констата се може извући испред подељених разлика.
3. Подељене разлике првог реда полинома степена n су полиноми степена $n-1$.

Да би смо доказали последњу особину, приметимо да на основу Безуовог става важи

$$P_n(x) = (x - x_i)Q_{n-1}(x) + P_n(x_i), \quad \text{па је} \quad P_n[x, x_i] = \frac{P_n(x) - P_n(x_i)}{x - x_i} = Q_{n-1}(x).$$

Следи да су подељене разлике n-тог реда полинома степена n константе, а полинома степена мањег од n једнаке нули.

Ако су чворови једнако размакнути, између коначних и подељених разлика постоји веза:

$$\delta^n y_k = \delta(x_k, x_k + h, \ldots, x_k + nh) = \frac{\Delta^n y_k}{n! h^n}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

7.5 Њутнови интерполациони полиноми са подељеним разликама

Нека је функција дата вредностима $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$, при чему су чворови међусобно различити.

Први Њутнов полином са подељеним разликама је

$$P_n(x) = y_0 + \delta(x_0, x_1)(x - x_0) + \delta(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Грешка интерполације је

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \quad \eta \in (x_0, x_n).$$

Други Њутнов полином са подељеним разликама је

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_n &+ \delta(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + \delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + \\ &+ \delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1). \end{aligned}$$

Налажење Њутновог интерполационог полинома захтева формирање таблице подељених разлика (што није био случај код Лагранжовог), али приликом додавања новог чвора не морамо цео полином рачунати из почетка јер важи

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0)\cdots(x - x_n)\delta(x_0, \ldots, x_{n+1}).$$

Како у општем случају важи

$$\begin{aligned} f(x_m) = f(x_0) &+ (x_m - x_0)\delta(x_0, x_1) + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\delta(x_0, x_1, x_2) + \cdots \\ &+ (x_m - x_0)(x_m - x_1)\cdots(x_m - x_{m-1})\delta(x_0, x_1, \ldots, x_m), \end{aligned}$$

можемо формулисати наредну теорему о грешки интерполације (узимањем да је $x_m = x$, $m - 1 = n$).

Теорема 7.2. Ако функција f има коначне вредности у тачкама $x_0, \ldots, x_n, x$, важи формула:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x)\delta(x_0, \ldots, x_n, x), \quad \omega(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n). \tag{7.1}$$

Приметимо да је за израз за грешку у претходној формули потребна тачна вредност функције $f(x)$, која је непозната (ако се функција замени полиномом степена n, онда је подељена разлика реда $n + 1$ једнака нули). Напоменимо још да се, за разлику од коначних разлика, подељене разлике δ^n у општем случају не смањују када n расте (и нису сличне између себе за довољно велико n).

7.6 Инверзна интерполација

Нека је функција $y = f(x)$ задата својим вредностима $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$.

Поступак налажења аргумента x који одговара задатој вредности y функције $y = f(x)$, која није дата у таблици, назива се инверзна или обратна интерполација.

Овај задатак се може решити применом Лагранжове интерполационе формуле: за то је довољно узети да је x функција и y променљива, $x = x(y)$. Наравно, потребно је претпоставити постојање инверзне функције. Лагранжов интерполациони полином је у овом случају облика

$$L_n(y) = \omega(y) \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(y - y_i)\omega'(y_i)}, \quad \omega(y) = (y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_n).$$

7.7 Конвергенција интерполационог процеса

Поставља се питање да ли низ $L_n(x)$ интерполационих полинома непрекидне функције $f(x)$ конвергира ка функцији $f(x)$ када број чворова неограничено расте, тј. када $n \to \infty$. Наравно, низ L_n зависи и од расподеле чворова x_i, а не само од функције f. Сузимо зато проблем на једнако размакнуте чворове.

Наредни пример илуструје да се маскимална грешка интерполације може повећавати за већи број чворова и познат је као *Рунгеов феномен*.

Пример 7.2. Посматрајмо низ интерполационих полинома $L_n(x)$ за функцију $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на интервалу $[-5, 5]$, при чему су чворови једнако размакнути. Нека је $Er(n) = \max_{x \in [-5,5]} |f(x) - L_n(x)|$. Овако дефинисана грешка интерполације за различите вредности n је приказана у наредној табели.

n	4	8	12	16	20	24
$Er(n)$	0.44	1.04	3.66	14.25	58.59	252.78

Иако се изводи функције $f(x)$ у пољу $\mathbb{R}$ "лепо"понашају, продужењем на комплексну раван $\mathbb{C}$ Тејлоров ред комплексно вредносне функције $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ конвергира само у јединичном диску, јер функција $f(z)$ има полове у тачкама $\pm i$.

Дефиниција 7.1. (Цела функција) Функција $f(x)$ се назива целом функцијом, ако се може приказати у облику степеног реда

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

који конвергира за свако $x \in [a, b]$. Дакле, f има изводе произвољног реда.

Може се показати да ако је функција $f(x)$ *цела*, тада низ интерполационих полинома за произвољан избор чворова равномерно конвергира ка функцији $f(x)$, $x \in [a, b]$.

8 Нумеричко диференцирање

Претпоставимо да треба нумерички одредити извод функције f која је дата таблично, или је њен аналитички израз јако компликован.

Један од могућих начина да се нумерички одреди извод је следећи: на уоченом одсечку $[a,b]$ функција $f(x)$ се замени интерполационим полиномом $P_n(x)$, а затим се стави да је

$$f'(x) \approx P_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

На аналоган начин се поступа у случају налажења извода виших редова.

Ако је функција $f(x)$ довољно глатка и ако су растојања између чворова довољно мала на интервалу $[a,b]$, може се очекивати да се на том интервалу $f'(x)$ и $P_n'(x)$ не разликују много.

Ако је грешка интерполације

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

тада је грешка диференцирања

$$r_n(x) = R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x).$$

За ред извода има смисла узети само $k < n$. Приметимо да је код интерполације грешка у чворовима једнака нули, док код диференцирања то не мора бити случај. Дакле, у општем случају, нумеричко диференцирање има мању тачност од интерполације.

Нека је функција $f(x)$ задата на скупу еквидистантних тачака $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$. Да бисмо апроксимирали вредности извода $f'(x), f''(x), \ldots$ на интервалу $[a,b]$, прво функцију $f(x)$ апроксимирамо интерполационим полиномом. Нека је то први Њутнов интерполациони полином

$$y = y_0 + \Delta y_0 \cdot u + \Delta^2 y_0 \frac{u(u-1)}{2!} + \cdots, \quad u = \frac{x - x_0}{h}.$$

Како је

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{du},$$

важи

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2 - 6u + 2) + \frac{\Delta^4 y_0}{12}(2u^3 - 9u^2 + 11u - 3) + \cdots\right].$$

Даље је

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d(y')}{du},$$

па је

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (u-1) + \frac{\Delta^4 y_0}{12}(6u^2 - 18u + 11) + \cdots\right].$$

Поступак за налажење приближних вредности извода коришћењем другог Њутновог полинома је идентичан, а код Лагранжовог изводи се налазе директно.

Пример 8.1. Функција $y = f(x)$ је задата таблицом

x	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
$f(x)$	1.58365	1.68662	1.79744	1.91650	2.04424

Израчунати: а) $f'(0.40)$, б) $f''(0.40)$, в) $f'(0.42)$, г) $f'(0.59)$.

Саставимо таблицу коначних разлика

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.40	1.58365				
		0.10297			
0.45	1.68662		0.00785		
		0.11082		0.00039	
0.50	1.79744		0.00824		-0.00003
		0.11906		0.00036	
0.55	1.91650		0.00860		
		0.12774			
0.60	2.04424				

а) За $u = (x - x_0)/h = 0$ применом (извода) првог Њутновог интерполационог полинома добијамо

$$f'(0.40) = \frac{1}{0.05}\left[0.10297 - \frac{0.00785}{2} + \frac{0.00039}{3} - \frac{-0.00003}{4}\right] = 1.98365.$$

Напомена: Могуће је и изводе у чворовима (осим евентуално крајњим) заменити нпр. приближним вредностима

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \text{или} \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

али на тај начин очекујемо да ћемо добити мању тачност. Нпр. у примеру под а)

$$f'(0.40) = f'(x_0) \approx \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0.10297}{0.05} = 2.0594.$$