9 Метода најмањих квадрата

9.1 Решавање преодређених система једначина

Посматрајмо систем једначина

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n, \end{aligned}$$

где је $n > m$, тј. број једначина је већи од броја непознатих. Овакав систем једначина зовемо *преодређеним* и он у општем случају није сагласан. Ипак, ако су величине a_{ij} и b_j $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$ приближни бројеви, можда се могу одредити приближне вредности x_j, тако да све једначине буду задовољене са извесном грешком.

Једна од метода за решавање преодређених система је *метода најмањих квадрата* и састоји се у налажењу вредности x_j за које је сума квадрата разлика између десних и левих страна једначина у систему минимална, тј.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \right]^2 \quad \text{је минимално.}$$

Услови минимума величине S су

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left[b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \right] a_{ik} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Претходни систем има m једначина и m непознатих и зове се нормалан систем једначина, а полазни систем се зове систем условних једначина.

Пример 9.1. Методом најмањих квадрата решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ x - y &= -1 \\ 2x + y &= 7. \end{aligned}$$

Прво формирамо суму

$$S = (x + 2y - 5)^2 + (x - y + 1)^2 + (2x + y - 7)^2,$$

па налазимо њен минимум. Стационарне тачке функције S су решења система

$$\begin{aligned} S'_x &= 2(x + 2y - 5) + 2(x - y + 1) + 2(2x + y - 7) \cdot 2 = 0 \\ S'_y &= 2(x + 2y - 5) \cdot 2 + 2(x - y + 1) \cdot (-1) + 2(2x + y - 7) = 0, \end{aligned}$$

тј. $2x + y = 6,\ x + 2y = 6$, па је једина стационарна тачка $(x, y) = (2, 2)$ и она је минимум функције S.

9.2 Апроксимација функција методом најмањих квадрата

Нека је функција $y = f(x)$ дата својим вредностима $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$. Метод најмањих квадрата представља налажење функције $\varphi(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ са непознатим параметрима $a_1, \ldots, a_n$ која апроксимира функцију $y = f(x)$ тако да је сума квадрата растојања од $\varphi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ од y_i минимална. Дакле, треба минимизовати функцију

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - \varphi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n)]^2,$$

па треба решити одговарајући нормални систем једначина

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{9.1}$$

Ако је $\varphi(x; a_0, \ldots, a_n)$ линеарна апроксимациона функција по непознатим параметрима $a_0, a_1, \ldots, a_n$, тј. има облик

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

тада је одговарајући нормални систем једначина (9.1) линеаран.

Пример 9.2. Методом најмањих квадрата наћи линеарну функцију $\varphi(x) = a + bx$ која апроксимира таблично дату функцију

x_i	1	2	3	4
y_i	3.5	3.0	2.8	2.3

Формирамо функцију

$$S = \sum_{i=0}^{3} [y_i - (a + bx_i)]^2 = (3.5 - a - b)^2 + (3.0 - a - 2b)^2 + (2.8 - a - 3b)^2 + (2.3 - a - 4b)^2$$

и налазимо њене стационарне тачке, тј. решења система $S'_a = 0,\ S'_b = 0$, тј.

$$-27.1 + 10a + 30b = 0, \quad -11.6 + 4a + 10b = 0,$$

одакле добијамо

$$(a, b) = (3.85, -0.38), \quad \text{па је} \quad \varphi(x) = 3.85 - 0.38x.$$

Са друге стране, ако функција $\varphi(x)$ није линеарна по својим параметрима, одговарајући нормални систем није линеаран, па га треба решити неким сложенијим нумеричким методом, нпр. Њутновим методом за системе. Један покушај бржег приближног одређивања параметара је увођење смена $X = g(x),\ Y = h(y)$ помоћу којих се нелинеарни проблем своди на линеарни. Нпр. нека је $\varphi(x; a_0, a_1) = a_0 e^{a_1 x}$. Тада логаритмовањем и увођењем смена

$$X = x,\ Y = \ln y,\ b_0 = \ln a_0,\ b_1 = a_1$$

проблем се своди на линеаран јер треба минимизовати функцију

$$\bar{S}(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^{n} [Y_i - b_0 - b_1 X_i]^2.$$

Ипак, на овај начин решавамо други проблем у односу на претходни, тј. у односу на проблем минимизовања функције

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - a_0 e^{a_1 x_i}]^2$$

и зато добијене вредности могу значајно да одступају.

Пример 9.3. Методом најмањих квадрата одредити параметре a и b тако да функција $\varphi(x) = ae^{bx}$ апроксимира таблично дату функцију

x_i	0	0.25	0.4	0.5
y_i	9.532	7.983	4.826	5.503

Директна примена методе најмањих квадрата би захтевала минимизовање функције

$$S(a,b) = \sum_{i=0}^{3}(y_i - ae^{bx_i})^2,$$

тј. решавање система нелинеарних једначина $S'_a = 0,\ S'_b = 0$ (на овај начин добило би се решење $(a,b) = (9.73109, -1.26518)$). Да бисмо избегли нумеричке методе за решавање оваквог система, уведимо смене $X = x,\ Y = \ln y,\ A = \ln a,\ B = b$, и минимизујмо функцију

$$\bar{S}(A,B) = \sum_{i=0}^{3}(Y_i - A - BX_i)^2, \quad (X_i = x_i,\ Y_i = \ln(y_i)), \quad \text{тј.}$$

$$\bar{S} = (2.25465 - A - 0\cdot B)^2 + (2.07731 - A - 0.25\cdot B)^2 + (1.57402 - A - 0.4\cdot B)^2 + (1.70529 - A - 0.5\cdot B)^2.$$

Одговарајући нормални систем $\bar{S}'_A = 0,\ \bar{S}'_B = 0$ је линеаран:

$$-15.2226 + 8A + 2.3B = 0,\ -4.00316 + 2.3A + 0.945B.$$

Његово решење је $(A,B) = (2.28108, -1.31567)$, па је $a = e^A = 9.7872$ и $b = B = -1.31567$.

Сличне трансформација променљивих је могуће су у следећим случајевима:

$$\begin{array}{ll}
1^\circ\ y = a_0x^{a_1}, & X = \ln x,\ Y = \ln y,\ (b_0,b_1) = (\ln a_0, a_1),\\
2^\circ\ y = \dfrac{1}{a_0 + a_1x}, & X = x, \quad Y = \dfrac{1}{y}, \quad (b_0,b_1) = (a_0,a_1),\\
3^\circ\ y = \dfrac{x}{a_0 + a_1x}, & X = \dfrac{1}{x}, \quad Y = \dfrac{1}{y}, \quad (b_0,b_1) = (a_0,a_1),\\
4^\circ\ y = \dfrac{1}{a_0 + a_1e^{-x}}, & X = e^{-x},\ Y = \dfrac{1}{y}, \quad (b_0,b_1) = (a_0,a_1).
\end{array}$$

10 Нумеричка интеграција

Поступак приближног израчунавања интеграла

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{10.1}$$

на основу низа датих вредности $y_k = f(x_k)$, $x_k \in [a,b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, назива се *нумеричка интеграција*.

Формуле за приближно израчунавање интеграла су *квадратурне формуле*. Најчешће се те формуле добијају тако што се подинтегрална функција $f(x)$ замени (на одсечку $[a,b]$ или његовим деловима) једноставнијом функцијом $\varphi(x)$ која је у неком смислу блиска функцији $f(x)$. Нпр. захтева се да се ове две функције поклапају у чворовима, $\varphi(x_i) = f(x_i)$ и тада се добијају интерполационе квадратурне формуле. Ми ћемо за функције $\varphi(x)$ бирати полиноме, а уобичајени избори за $\varphi(x)$ су и тригонометријски полиноми и рационалне функције. Ако је интервал интеграције коначан и на њему нема сингуларитета, може се постићи висока тачност са интерполационим полиномима релативно ниског степена.

Квадратурне формуле су најћешће облика

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \quad x_k \in [a,b], \tag{10.2}$$

где су A_k коефицијенти или тежине, а x_k чворови квадратурне формуле, $I(f) \approx Q_n(f)$. Ако је број чворова n фиксиран, оваква формула има $2n+2$ параметра (по $n+1$ чворова и тежина).

Претпоставимо да су чворови x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, унапред изабрани и нека је

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Лагранжов интерполациони полином за функцију $f(x)$ у тим чворовима је

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k)$$

и ако је $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| < \infty$, важи

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x), \quad |R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

Даље је

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx,$$

одакле добијамо редом тежине и оцену грешку квадратурне формуле (10.2)

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}dx, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$|r_n(f)| = |I(f) - \sum_{i=0}^{k} A_k f(x_k)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\omega(x)|dx.$$

Ако су крајеви интервала интеграције уједно и чворови квадратурне формуле, тада је она затвореног типа, а иначе је отвореног типа.

10.1 Алгебарски степен тачности квадратурне формуле. Метод неодређених коефицијената.

Ако је квадратурна формула тачна за све полиноме степена мањег или једнаког од m, а није тачна за x^{m+1}, тада је алгебарски степен тачности те формуле једнак m.

Ако квадратурна формула има $n+1$ чвор, увек се може постићи да алгебарски степен тачности буде бар n. Можемо користити раније описан начин - интегралити Лагранжов интерполациони полином, чиме се добија интерполациона квадратурна формула одговарајућег степена тачности. Други начин је *метод неодређених коефицијената*, где се тежине A_k у квадратурној формули (10.2) бирају тако да формула буде тачна на скупу $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, тј. треба да важи

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \quad \text{за} \quad f(x) \in \{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

Може се постићи и већи алгебарски степен тачности ако се могу бирати и чворови - највише $2n-1$ у Гаусовим квадратурним формулама. Ипак, ми ћемо се овде задржати на случају када су чворови унапред изабрани и када се само бирају тежине тако да алгебарски степен тачности буде максималан.

Пример 10.1. Наћи коефицијенте A_0, A_1, A_2 тако да квадратурна формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi x/2)dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

има максималан алгебарски степен тачности.

Дата квадратурна формула треба да буде тачна за редом функције $1, x, x^2, \dots$. Како су дата три параметра, очекујемо да ће алгебарски степен тачности бити бар два, тј. да ће дата формула бити тачна за $f(x) \in \{1, x, x^2\}$, одакле добијамо систем

$$\begin{aligned}
f(x) = 1: &\quad A_0 + A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} \cos(\pi x/2)dx = \frac{4}{\pi} \\
f(x) = x: &\quad -A_0 + A_2 = \int_{-1}^{1} x\cos(\pi x/2)dx = 0 \\
f(x) = x^2: &\quad A_0 + A_2 = \int_{-1}^{1} x^2\cos(\pi x/2)dx = \frac{4}{\pi} = \frac{4(\pi^2-8)}{\pi^3},
\end{aligned}$$

чије је решење $(A_0, A_1, A_2) = (0.121, 1.032, 0.121)$. Приметимо још да је алгебарски степен тачности бар три, јер за $f(x) = x^3$ добијамо

$$-A_0 + A_1 = 0 = \int_{-1}^{1} x^3\cos(\pi x/2)dx.$$

10.2 Трапезна квадратурна формула

Конструишимо интерполациону квадратурну формулу за интеграл (10.1), са чворовима $x_0 = a$ и $x_1 = b$.

Лагранжов интерполациони полином је у овом случају

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \frac{1}{b-a}\left[f(b)(x-a) + f(a)(b-x)\right].$$

Интеграцијом овог полинома од a до b добијамо *трапезну квадратурну формулу*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(b)(x-a) + f(a)(b-x))dx = \frac{1}{b-a}\left[f(b)\frac{(x-a)^2}{2} - f(a)\frac{(b-x)^2}{2}\right]\Bigg|_a^b = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right].$$

Грешка методе је

$$r_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\eta)}{2!}(x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta), \quad \eta \in (a,b).$$

Геометријски, трапезна квадратуран формула апроксимира интеграл трапезом, тј. одсечом праве од тачке $(a, f(a))$ до тачке $(b, f(b))$. Наравно, трапезна формула ће онда бити тачна на свим линеарним полиномима (правама).

На основу формуле за грешку видимо да грешка зависи од дужине $b-a$, па да бисмо добили већу тачност можемо поделити интервал $[a,b]$ на n једнаких делова дужина $h = \frac{b-a}{n}$ и на сваком одсечку $[a+kh, a+(k+1)h]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ применити трапезно правило

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_k + f_{k+1}\right] + r_k(f),$$

где је $f_k = f(a+kh)$ и

$$r_k(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k), \quad \eta_k \in (a+kh, a+(k+1)h).$$

На овај начин добијамо *уопштену трапезну формулу*,

$$Q_T(f) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right] + r(f), \quad r(f) = -\frac{h^3}{12}\left[f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})\right]. \tag{10.3}$$

Ако је f'' непрекидна на интервалу $[a,b]$, тада постоји $\eta \in (a,b)$ тдв.

$$f''(\eta) = \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n}.$$

Искористимо ли још да је $b - a = n \cdot h$, добијамо да је грешка уопштене трапезне формуле

$$r(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a,b).$$

Ако би у задатку била задата тачност ε, онда бисмо из услова

$$|r(f)| \leqslant \frac{b-a}{2} M_2 \cdot h^2 \leqslant \varepsilon, \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

прво нашли корак h:

$$h \leqslant \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}}.$$

Пример 10.2. Користећи уопштену трапезну квадатурну формулу израчунати

$$\int_0^{0.4} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Нека је $h = 0.1$. Вредности функције у чворовима су тада

$$f(0) = 1.00000,\ f(0.1) = 0.99990,\ f(0.2) = 0.99840,\ f(0.3) = 0.99196,\ f(0.4) = 0.97504,$$

па је према формули (10.3)

$$Q_T(f) = \frac{0.1}{2}\left[1.00000 + 2(0.99990 + 0.99840 + 99196) + 0.97504\right] = 0.39778.$$

Да бисмо поценили ову апроксимацију, рачунамо изводе

$$f'(x) = -\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x^2(5x^4-3)}{(1+x^4)^3}.$$

и налазимо

$$\max_{[0,0.4]} |f''(x)| \approx 1.7.$$

Коначно,

$$|r(f)| \leqslant \frac{0.4}{12} \cdot 0.1^2 \cdot 1.7 < 0.0006,$$

па је $I(f) = 0.3978 \pm 0.0006$.

10.3 Симпсонова квадратурна формула

Слично као за трапезну формулу, интергацијом од a до b Лагранжовог интерполационог полинома са чворовима $a, \frac{a+b}{2}, b$ добија се *Симпсонова квадратурна формула*

$$Q_S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \tag{10.4}$$

јер је $h = \frac{b-a}{2}$. Геометријски, површина $I(f)$ се апроксимира површином испод лука параболе која садржи тачке $(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), (b, f(b))$ од праве $x = a$ до праве $x = b$. Следи да је алгебарски степен тачности ове квадратурне формуле бар 2 - она је тачна на свим квадратним полиномима. Испоставља се да је Симпсонова формула тачна и за полиноме трећег степена - да бисмо то видели приметимо да је тачна за полином $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3$, јер је ова функција непарна на $[a, b]$ у односу на средину интервала $\frac{a+b}{2}$, а коефицијенти у Симпсоновој формули су симетрични. Дакле, за грешку ове формуле важи $r_2(x^3) = 0$, па је њен алгебарски степен тачности бар 3. Показује се да за грешку Симпсонове формуле важи

$$r_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b).$$

Као и у случају трапезне формуле, можемо добити *уопштену Симпсонову формулу* поделом интервала $[a, b]$ на паран број $n = 2m$ једнаких делова дужина $h = \frac{b-a}{n}$:

$$I(f) \approx \frac{h}{3}[f_0 + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}) + f_n], \tag{10.5}$$

$$r(f) = -\frac{n \cdot h^5}{180} \cdot f^{(4)}(\eta) = -\frac{(b-a)h^4}{180} \cdot f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a, b). \tag{10.6}$$

Пример 10.3. Користећи Симпсонову квадатурну формулу израчунати $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Нека је $h = 0.1$ и $f(x) = e^{-x^2}$. Рачунамо $f_i = f(x_i)$, $x_i = hi$, $i = 0, 1, \ldots, 10$:

$$f_0 = 1.00000,\ f_1 = 0.99005,\ f_2 = 0.96079, \ldots,\ f_{10} = 0.36788,$$

па коришћењем уопштене Симпсонове формуле (10.5) добијамо

$$I(f) \approx 0.74683.$$

Да бисмо проценили грешку, треба нам максимум M_4 четвртог извода: $f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$ на интервалу $[0, 1]$. Испоставља се да је $M_4 = 12$, па је

$$|r(f)| \leqslant \frac{1}{180} \cdot 0.1^4 \cdot 12 < 0.000007.$$

Напоменимо на крају да су трапезно и Симпсоново правило специјални случајеви Њутн-Коутсових формула, које представљају интерполационе квадратурне формуле са једнако размакнутим човоровима. Како се те формуле добијају интеграцијом од a до b Лагранжовог интерполационог полинома са једнако размакнутим човровима, за који је раније показано да не конвергира за све непрекидне функције (Рунгеов феномен је приказивао како грешка Лагранжове интерполације са једнако размакнутим чворовима функције $1/(1+25x^2)$ на $[-1, 1]$ експоненцијално расте са повећањем броја чворова), исто важи и за Њутн-Коутсове квадратуре. Испоставља се да је довољан услов за ковергенцију интерполационих квадратура за све непрекидне функције да тежине A_k буду позитивне, што није увек испуњено у случају Њутн-Коутсових квадратура. Тај услов је увек испуњен у случају Гаусових квадратурних формула (које имају максималан алгебарски степен тачности $2n - 1$, где је n број човора), али се ту захтева да чворови буду унапред изабрани (чворови су нуле одговарајућих ортогоналних полинома).

10.4 Рунгеов принцип оцене грешке

Како изведена оцена грешке квадратурне формуле зависи од извода реда $n+1$, који је у пракси непознат или компликован за рачунање, користе се приближни методи оцене грешке.

Изведимо један приближан метод за оцену грешке Симпсонове формуле, познат као *Рунгеова оцена*. Претпоставимо да се $f^{(4)}(x)$ не мења много на $[a,b]$ и запишимо грешку (10.6) у облику

$$R = K \cdot h^4, \tag{10.7}$$

где константа K зависи од функције $f(x)$ и интервала интеграције (a,b). Нека су I_h и I_{2h} приближне вредности интеграла (10.1) добијене помоћу Симпсонове формуле са корацима h и $2h$ редом. Следи да је

$$I(f) = I_h + M \cdot h^4 \quad \text{и} \quad I(f) = I_{2h} + M \cdot (2h)^4,$$

па је *Рунгеова оцена грешке*

$$|R| = \frac{|I_h - I_{2h}|}{15}.$$

Приметимо да је степен корака h у формули за грешку (10.7) једнак $m+1$, где је m алгебарски степен тачности коришћене квадратурне формуле. На основу те чињенице можемо закључити да је Рунгеова оцена грешке у случају произвољне квадратуре алгебарског степена тачности m

$$|R| = \frac{|I_h - I_{2h}|}{2^{m+1} - 1}.$$

11 Нумеричко решавање диференцијалних једначина

11.1 Ојлеров метод за диференцијалне једначине првог реда

Претпоставимо да желимо да нађемо приближно решење Кошијевог проблема

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 1. \tag{11.1}$$

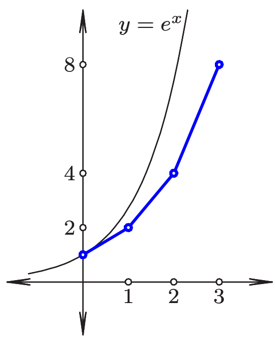
Како је у великом броју случајева тешко или немогуће одредити решење диференцијалне једначине (знамо да налазимо решења само одређених типова диференцијалних једначина, а и тада се могу појавити неелементарни интеграли), ово питање се природно намеће.

Најпростији нумерички метод за приближно одређивање непознате функције $y(x)$ Кошијевог проблема (11.1) је Ојлеров метод који је илустрован у наредном примеру.

Пример 11.1. Претпоставимо да желимо да нађемо приближно решење диференцијалне једначине $y' = y$, уз почетни услов $y(0) = 1$.

Наравно, решење овог Кошијевог проблема је $y = e^x$. У наставку је описан Ојлеров метод за одређивање приближног решења y.

• Пођимо од тачке $(x_0, y_0) = (0, 1)$ која је дата као почетни (Кошијев) услов. Како је $y' = y$, следи да је $y'(x_0) = y_0 = 1$. Изаберимо нпр. корак $h = 1$.



• Претпоставимо да се на интервалу $[x_0, x_1]$ функција y апроксимира правом нагиба $y'(x_0) = 1$, при чему је y_0 познато. Тада је

$$y_1 = y_0 + y'(x_0) \cdot h = 1 + 1 \cdot 1 = 2,$$

па је (на основу дате диференцијалне једначине) $y'(x_1) = y_1 = 2$.

• Настављамо поступак: на интервалу $[x_1, x_2]$ функција y се апроксимира правом нагиба $y'(x_1) = 2$, уз познато y_1. Тада је

$$y_2 = y_1 + y'(x_1) \cdot h = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

и $y'(x_2) = y_2 = 4$.

Коначно, на интервалу $[x_2, x_3]$ функција y се апроксимира правом нагиба $y'(x_2) = 4$, уз познато y_2. Тада је

$$y_3 = y_2 + y'(x_2) \cdot h = 4 + 4 \cdot 1 = 8$$

и $y'(x_3) = y_3 = 8$.

Дакле, Ојлеров метод је итеративни метод за одређивање приближног решења y Кошијевог проблема (11.1) дат формулом

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

што се у случају еквидистантних чворова са кораком h своди на

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Локална грешка Ојлеровог метода је грешка по кораку h. Ако је $y(x_1)$ тачно решење Кошијевог проблема (11.1) у тачки x_1, а y_1 приближно добијено Ојелровом методом (са кораком h), тада је локална грешка

$$R_L = y(x_1) - y_1 = y(x_1) - y(x_0) - hy'(x_0).$$

На основу Тејлоровог развоја функције y у тачки x_0 је

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(\eta_0), \quad \eta_0 \in (x_0, x_1), \quad \text{па је} \quad R_L = \frac{h^2}{2}y''(\eta_0).$$

Глобална грешка на $[x_0, x_n]$ је

$$R_G = \frac{h^2}{2}[y''(\eta_0) + y''(\eta_1) + \cdots + y''(\eta_{n-1})] = (x_n - x_0) \cdot \frac{h}{2}y''(\eta), \quad \eta \in [x_0, x_n].$$

Дакле, Ојлеров метод је:

- експлицитан, јер је y_{i+1} експлицитна функција од y_i,
- првог реда, јер је локална грешка пропорционална квадрату корака h^2, а глобална грешка је пропорционална кораку h.

11.2 Примена Ојлеровог метода на решавање диференцијалних једначина вишег реда

Користимо особину да се диференцијална једначина n-тог реда може написати као систем диференцијалних једначина првог реда.

Нека је дата диференцијална једначина $y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x))$, корак h и почетни услови $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$. Ојлеров метод се имплементира формулом

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y'_{i+1} \\ \vdots \\ y_{i+1}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i + h \cdot y'_i \\ y'_i + h \cdot y''_i \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)} + h \cdot f(x_i, y_i, y'_i, \dots, y_i^{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Пример 11.2. Користећи Ојлеров метод апроксимирати решење диференцијалне једначине

$$y''(x) = y'(x) - 2y(x) \quad y'(0) = y(0) = 1, \quad h = 0.2.$$

За $i \geqslant 0$ рачунамо итерације

$$\begin{aligned} y''_i &= y'_i - 2y_i, \\ y_{i+1} &= y_i + hy'_i, \\ y'_{i+1} &= y'_i + hy''_i \end{aligned}$$

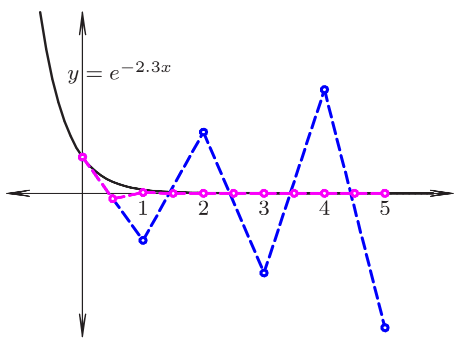
и добијамо вредности

i	x_i	y_i	y'_i	y''_i
0	0	1	1	-1
1	0.2	1.2	0.8	-1.6
2	0.4	1.36	0.48	-2.24
3	0.6	1.456	0.032	-2.88

11.3 Стабилност Ојлеровог метода

Ојлеров метод може бити нумерички нестабилан, што је илустровано у наредном примеру.

Пример 11.3. Решење линеарне једначине $y' = -2.3y$, $y(0) = 1$ је функција $y(x) = e^{-2.3x}$ која тежи 0 када $x \to \infty$. Ипак, применом Ојлеровог метода са кораком $h = 1$ нумеричко решење осцилује и расте (плава линија) - очигледно је погрешно. Са друге стране, за мањи корак $h = 0.5$ нумеричко решење осцилује ка нули (љубичаста линија). Резултати на интервалу $[0, 5]$ су приказани у наредној табели. Приметимо да вредности $y_5 = 3.71$ са кораком $h = 1$ и $y_{10} = 5.77 \cdot 10^{-9}$ са кораком $h = 0.5$ апроксимирају вредност $e^{-2.3 \cdot 5} \approx 1.01 \cdot 10^{-5}$. Иако добијена апроксимација у другом случају осцилује ка нули, чак и тада се она “солидно” разликује од тачног решења.



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i $(h = 1)$	-1.3	1.69	-2.20	2.86	-3.71					
y_i $(h = 0.5)$	-0.15	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$-3.38 \cdot 10^{-3}$	$5.06 \cdot 10^{-4}$	$-7.59 \cdot 10^{-5}$	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$-1.71 \cdot 10^{-6}$	$2.56 \cdot 10^{-7}$	$-3.84 \cdot 10^{-8}$	$5.77 \cdot 10^{-9}$

Ако се примени Ојлеров метод на решавање диференцијалне једначине $y' = ky$, нумеричко решење је нестабилно ако је kh ван диска $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| \leqslant 1\}$. То значи да нумеричко решење може доста да расте иако се то не дешава са тачним решењем (тзв. “stiff equations”).

Ово ограничење, заједно са слабом конвергенцијом (глобална грешка је реда величнине h) значи да се у пракси уместо најпростијег Ојлеровог метода често бирају други, сложенији методи са којима се постиже боља тачност (нпр. методи Рунге-Кута).

11.4 Модификације Ојлеровог метода

Најпростија модификација Ојлеровог метода је *имплицитан Ојлеров метод*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

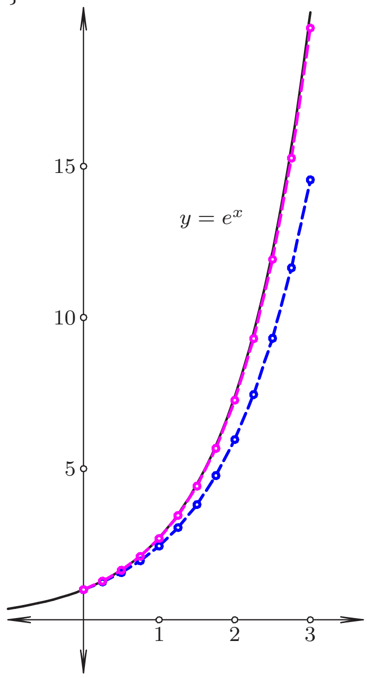
где се функција f уместо у полазној тачки (x_i, y_i) рачуна у крају посматраног подинтервала - тачки (x_{i+1}, y_{i+1}). Овај метод је имплицитан, јер се y_{i+1} појављује са обе стране једнакости, па у сваком кораку треба решити једначину по y_{i+1}, што захтева додатна израчунавања. Грешка имплицитног Ојлеровог метода је иста као код експлицитног, али је регион стабилности већи: за стабилност решења kh треба да буде у комплементу диска $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leqslant 1\}$.

Један начин да се постигне већа тачност је да се укључи више израчунавања функције, нпр. *метод средње тачке* је

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right),$$

који, као и Ојлеров метод, припада фамилији Рунге-Кута метода. Метод средње тачке је метод другог реда, што значи да су локална и глобална грешка реда величине h^3 и h^2 редом.

Пример 11.4. Посматрајмо Кошијев проблем $y' = y$, $y(0) = 1$. Изаберимо корак $h = 0.25$ и нађимо приближне вредности $y(3)$ користећи Ојлеров метод (плава линија) и метод средње тачке (љубичаста линија) да бисмо показали да други метод даје тачнију апроксимацију. Тачна вредност решења $y = e^x$ за $x = 3$ је $e^3 \approx 20.02$, а приближне вредности $y(3)$ добијене Ојлервим методом и методом средње тачке (са кораком 0.25) су редом 14.55 и 19.57.



Класичан Рунге-Кута метод (или $RK4$ метод) се дефинише на следећи начин:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

при чему је

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) && \text{(нагиб на почетку интервала - као код Ојлеровог метода)},\\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) && \text{(нагиб на средини интервала користећи } k_1\text{)},\\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) && \text{(нагиб на средини интервала користећи } k_2\text{)},\\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) && \text{(нагиб на крају интервала користећи } k_3\text{)}.
\end{aligned}$$

Коначно, нагиб $\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ који се користи у методи Рунге-Кута је тежинска просечна вредност ова четири нагиба, при чему већи утицај имају нагиби на средини интервала.

Ако у диференцијалној једначини $y' = f(x, y)$ функција f не зависи од y, тада се диференцијална једначина своди на интеграл, па је метод Рунге-Кута заправо Симпсоново правило.

Метод Рунге-Кута је метод четвртог реда, што значи да су локална и глобална грешка реда величине h^5 и h^4 редом.

Поменимо на крају да је други начин да се повећа тачност Ојлеровог метода је да се у кораку $i+1$ користе вредности $f(x_i, y_i)$ и $f(x_{i-1}, y_{i-1})$, као у *линеарним више-корачним методама*.