Други колоквијум из Математике 1 - смене 2 и 4, 18.12.2023.

1. група

1. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[9]{\cos 3x}-\sqrt[4]{\cos 2x}}{x^4}$.

2. Испитати ток и скицирати график функције $y(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4}+1$.

3. Наћи Тејлоров полином трећег степена за функцију $y(x)=\sqrt[3]{x}$ у околини тачке $a=8$. Помоћу њега наћи приближну вредност $\sqrt[3]{8.1}$ и проценити грешку те апроксимације.

4. Наћи кривину криве $\gamma(t)=(\cos t, \sin t, \frac{1}{4}\cos 2t)$.

Решења

1. Применом Лопиталовог правила дати лимес L сводимо на

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{9}\cos^{-\frac{8}{9}}(3x)(-3\sin 3x)-\frac{1}{4}\cos^{-\frac{3}{4}}(2x)(-2\sin 2x)}{4x^3}.$$

Приметимо сада да важи $\sin t\sim t-t^3/6$ кад $t\to 0$, па ако искористимо $\sin 3x\sim 3x-27x^3/6$ и $\sin 2x\sim 2x-8x^3/6$ кад $x\to 0$ (развијамо до трећег степена јер је именилац тог степена) и скратимо x у бројиоцу и имениоцу добијамо

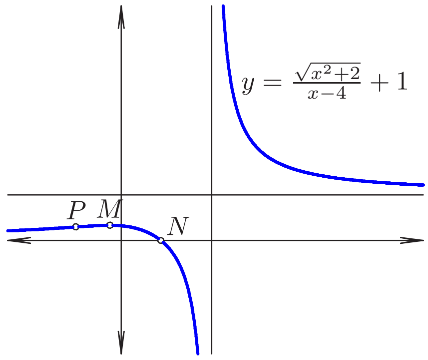
$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}\cos^{-\frac{8}{9}}(3x)(3x-27x^3/6)+\frac{1}{2}\cos^{-\frac{3}{4}}(2x)(2x-8x^3/6)}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^{-\frac{8}{9}}3x+\cos^{-\frac{3}{4}}2x}{4x^2}+\frac{3/2-2/3}{4}.\end{aligned}$$

Понављамо претходни поступак: примењујемо Лопититалово правило па користимо $\sin t\sim t$ кад $t\to 0$:

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8}{9}\cos^{-17/9}(3x)(-3\sin 3x)-\frac{3}{7}\cos^{-7/4}(2x)(-2\sin 2x)}{8x}+\frac{5}{24}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos^{-17/9}3x+3\cos^{-7/4}2x}{8}+\frac{5}{24}=-\frac{5}{8}+\frac{5}{24}=-\frac{5}{12}.\end{aligned}$$

2. Домен функције је $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; нула функције је тачка $N(\frac{7}{4},0)$; функција има вертикалну асимптоту $x=4$ и хоризонталне $x=2$ кад $x\to\infty$ и $x\to 0$ кад $x\to-\infty$. Изводи су

$$y'(x)=-\frac{2(2x+1)}{(x-4)^2\sqrt{x^2+2}},\quad y''(x)=\frac{2(x+2)(4x^2-5x+10)}{(x-4)^3\sqrt{(x^2+2)^3}}.$$



Први извод функције је позитиван за $x<-\frac{1}{2}$ и ту функција расте, негативан за $x\in(-\frac{1}{2},4)\cup(4,\infty)$ и ту функција опада, а тачка $M(-\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ је локални максимум функције. Други извод је позитиван за $x\in(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$ и ту је функција конвексна, а негативан за $x\in(-2,4)$ и ту је функција конкавна. Превојна тачка функције је $P(-2,1-\frac{1}{\sqrt{6}})$.

3. Налазимо $y(8) = 2$ и изводе

$$y'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad y''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \quad y'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}, \quad y^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-11/3},$$
$$y'(8) = \frac{1}{12}, \quad y''(8) = -\frac{1}{144}, \quad y'''(8) = \frac{5}{3456}.$$

Тејлоров полином је

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3, \quad T_3(8.1) \approx 2.008298852.$$

Максимум четвртог извода на интервалу $[8, 8.1]$ је $y^{(4)}(8) = \frac{5}{10368}$, па за грешку важи

$$|R_3(x)| = \left| \frac{5}{10368 \cdot 4!} \cdot (8.1-8)^4 \right| < 2.1 \cdot 10^{-9}.$$

Дакле, $\sqrt[3]{8.1} \approx 2.008298852 \pm 2.1 \cdot 10^{-9}$ ($\sqrt[3]{8.1} = 2.0082988502...$).

4. Налазимо редом векторе

$$\begin{aligned}
\gamma' &= (-\sin t, \cos t, -\frac{1}{2}\sin 2t),\\
\gamma'' &= (-\cos t, -\sin t, -\cos 2t),\\
\gamma' \times \gamma'' &= (-\cos^3 t, \sin^3 t, 1),
\end{aligned}$$

па је

$$|\gamma'| = \sqrt{-\sin^4 t + \sin^2 t + 1}, \quad |\gamma' \times \gamma''| = \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t + 1}, \quad K = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

Р. Мутавџић Ђукић