Други колоквијум из Математике 1 - смене 6 и 7, 28.12.2023.

1. Израчунати $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt[3]{2-\cos 2x} - \sin x}{x^3}$.

2. Испитати ток и скицирати график функције $y(x) = \frac{\ln((x-2)^2)}{x-2}$.

3. Наћи Маклоренов полином другог степена за функцију $y = y(x)$ дату имплицитно једначином $y + 1 - \sqrt[3]{y^2+1} = x$.

4. Наћи тачку на кривој $\gamma(t)=(e^{t/2}, e^{-t/2}, \sqrt{2}\,t)$ у којој је торзија екстремална.

Решења

1. Користимо Маклоренове развоје $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2)$ и

$$(2-\cos 2x)^{1/3} = (2 - (1 - 2x^2 + o(x^2)))^{1/3} = (1 + 2x^2 + o(x^2))^{1/3} = 1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$$

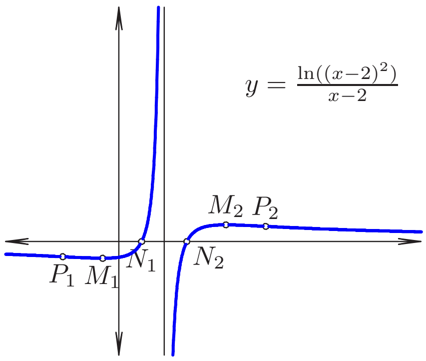
кад $x \to 0$. Дакле,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x\left(1 + \frac{2}{3}x^2\right) + o(x^3)}{x^3} = -\frac{5}{6}.$$

2. Домен функције је $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; нуле функције су тачке $N_1(1,0)$ и $N_2(3,0)$; функција има вертикалну асимптоту $x = 2$ и хоризонталну $y = 0$ кад $x \to \pm\infty$. Изводи су

$$y'(x) = \frac{2 - \ln((x-2)^2)}{(x-2)^2}, \quad y''(x) = \frac{2(\ln((x-2)^2) - 3)}{(x-2)^3}.$$

Први извод функције је позитиван за $x \in (2-e, 2) \cup (2, 2+e)$ и ту функција расте, негативан за $x \in (-\infty, 2-e) \cup (2+e, \infty)$ и ту функција опада, тачка $M_1(2-e, -\frac{2}{e})$ је локални минимум функције, а тачка $M_2(2+e, \frac{2}{e})$ њен локални максимум. Други извод је позитиван за $x \in (2-\sqrt{e^3}, 2) \cup (2+\sqrt{e^3}, \infty)$ и ту је функција конвексна, а негативан за $x \in (-\infty, 2-\sqrt{e^3}) \cup (2, 2+\sqrt{e^3})$ и ту је функција конкавна. Превојне тачке функције су $P_1(2-\sqrt{e^3}, -3/\sqrt{e^3})$ и $P_2(2+\sqrt{e^3}, 3/\sqrt{e^3})$



3. Налазимо $y(0) = 0$ и

$$y' = \left(1 - \frac{2y}{3(y^2+1)^{2/3}}\right)^{-1}, \quad y'(0) = 1, \quad y'' = -\frac{2(y^2-3)y'^2}{3(y^2+1)(3(y^2+1)^{2/3} - 2y)}, \quad y''(0) = \frac{2}{3},$$

$$T_2(x) = x + \frac{1}{3}x^2.$$

4. Рачунамо

$$\gamma'(t) = \frac{1}{2}(-e^{-t/2}, e^{t/2}, 2\sqrt{2}), \quad \gamma''(t) = \frac{1}{4}(e^{-t/2}, e^{t/2}, 0), \quad \gamma'''(t) = \frac{1}{8}(-e^{-t/2}, e^{t/2}, 0),$$

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \frac{1}{4}(-\sqrt{2}e^{t/2}, \sqrt{2}e^{-t/2}, -1), \quad |\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \frac{1}{16}(2e^t + 2e^{-t} + 1),$$

$$[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] = \frac{\sqrt{2}}{16},$$

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2e^t + 2e^{-t} + 1}, \quad T' = \frac{2\sqrt{2}(e^{-t} - e^t)}{(2e^t + 2e^{-t} + 1)^2} = 0 \quad \text{за} \quad t = 1.$$