Машински факултет, Београд

Нумеричке методе - писмени испит - јул 2024 - решења

1. Конвергира на основу другог поредбеног критеријума (са редом $\sum \frac{1}{3^n}$).

2. Довољно је спровести три итерације: почетна $(0, 0, 0)$, прва $(0.667, -0.547, 2.273)$, друга $(0.924, -0.951, 2.477)$, трећа $(0.992, -0.995, 2.498)$. (Тачно решење је $(1, -1, 2.5)$).

3. Решење је 0.512222.

4. Први Њутнов полином је

$$\begin{aligned} P^1(x) = 1 &- 1.2\left(x+\frac{1}{2}\right) - 0.5142\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) + 6.6852\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right) \\ &- 10.7982\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)x + 14.8068\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)x\left(x-\frac{1}{6}\right) \\ &- 29.6136\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{6}\right)x\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right); \quad P^1(-3/7) = 0.954924. \end{aligned}$$

Други Њутнов полином је

$$\begin{aligned} P^2(x) = 1 &+ 1.2\left(x-\frac{1}{2}\right) - 0.5142\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) - 6.6852\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right) \\ &- 10.7982\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)x - 14.8068\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)x\left(x+\frac{1}{6}\right) \\ &- 29.6136\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)x\left(x+\frac{1}{6}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right); \quad P^2(3/7) = 0.954924. \end{aligned}$$

Напомена: Интерполациони полином са истим бројем чворова је јединствен, па не би била грешка ни другачији избор првог/другог Њутновог полинома.

5. Вредности функције у датим човоровима су редом

$$1.4427, 1.3478, 1.2683, 1.2006, 1.1422, 1.0914, 1.0466, 1.0068,\ 0.9712, 0.9392, 0.9102.$$

Приближна вредност интеграла је 1.118423. Четврти извод функције $\ln^{-1}(1+x)$ је

$$\frac{6\log^3(x+1) + 22\log^2(x+1) + 36\log(x+1) + 24}{(x+1)^4\log^5(x+1)},$$

па се његов максимум на $[1, 2]$ може оценити са 38.3. Следи да је грешка мања од 2.2×10^{-5}. (Стварна вредност интеграла је $I \approx 1.11842481454969918803 2...$, па је заправо грешка мања од 1.9×10^{-6}).

Напомена: Могла се користити и Рунгеова процена грешке.