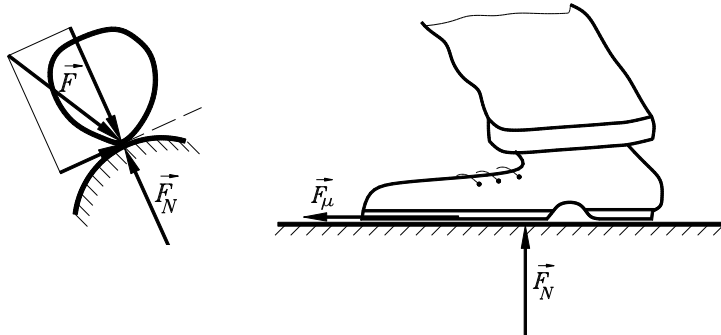


Trenje

Osnovni pojmovi

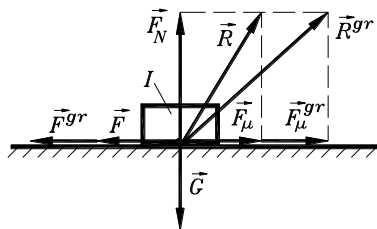


Poznato je da se pri pomeranju tela po površi drugog tela stvara otpor u dodirnim tačkama tih tela koji se naziva trenje. Veze koje su do sada razmatrane bile su idealne i one se mogu definisati kao veze kod kojih se zanemaruje trenje. Reakcija idealnih

veza je pravca normale na zajedničku tangentnu ravan u tački dodira dva tela

Trenje klizanja

Pod trenjem klizanja podrazumeva se otpor koji se javlja u zajedničkoj tangentnoj ravni kada jedno telo teži da klizi po površi drugog tela. Ova pojava vezana je za međudejstva delića dodirnih površi, njihovo zagrevanje i otkidanje od osnovnog tela.



$$\vec{R} = \vec{F}_N + \vec{F}_\mu$$

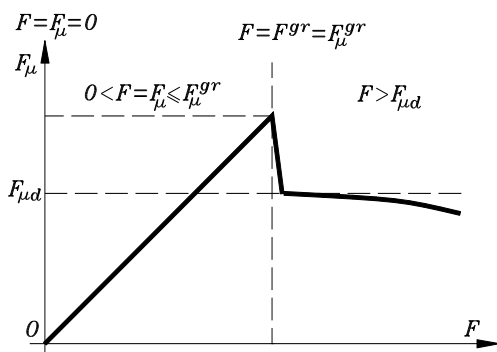
Predmet ovog razmatranja je pojednostavljena teorija trenja klizanja. Ona je izgrađena na Kulonovim zakonima, zasnovanim na eksperimentalnim istraživanjima, a koji glase:

$$1) 0 \leq F_\mu \leq F_\mu^{gr}$$

$$2) F_\mu^{gr} = \mu_0 F_N$$

gde je sa μ_0 označen statički koeficijent trenja klizanja.

3) Sila trenja klizanja, kada se posmatra ravnoteža tela, ne zavisi od veličine dodirne površine.



Iz prvog i drugog *Kulonovog* zakona sledi

$$F_\mu \leq \mu_0 F_N$$

Zavisnost između sile trenja klizanja \vec{F}_μ i sile \vec{F} koja izaziva promenu stanja u kome se telo nalazi, data je na slici.

$$F_{\mu d} = \mu_d F_N$$

gde je μ_d ($\mu_d < \mu_0$) dinamički koeficijent trenja klizanja

Postoji više načina za eksperimentalno određivanje statičkog koeficijenta trenja klizanja. Jedan od njih je prikazan na slici.

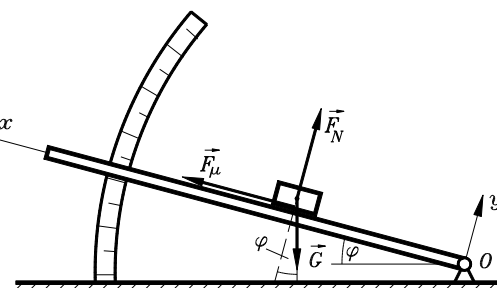
$$\sum X_i = 0;$$

$$F_\mu = G \sin \varphi,$$

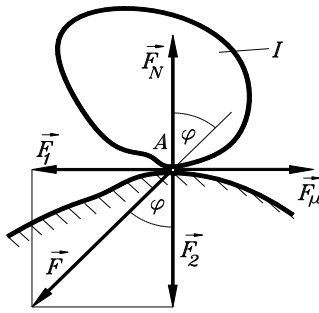
$$\sum Y_i = 0;$$

$$F_N = G \cos \varphi$$

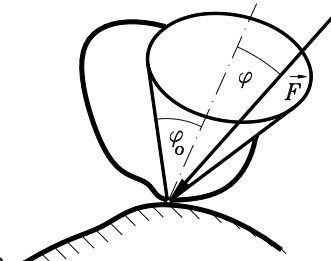
$$\mu_0 = \tan \varphi_0$$



Ugao trenja klizanja. Konus trenja klizanja



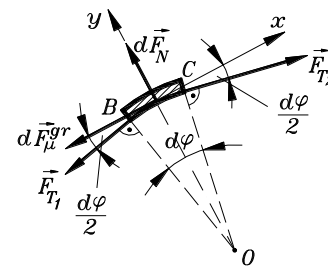
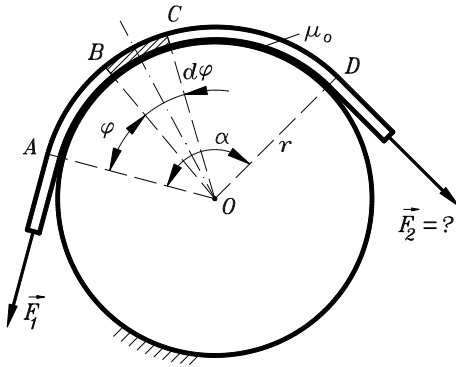
$$\begin{aligned} F_1 &= F_\mu \leq F_\mu^{gr} \\ F_1 &= F \sin \varphi \\ F_2 &= F_N = F \cos \varphi \\ \sin \varphi &\leq \mu_0 \cos \varphi \\ \tan \varphi &\leq \mu_0 \\ \varphi &\leq \varphi_0 \end{aligned}$$



Ugao φ_0 naziva se ugao trenja klizanja (ugao prirodnog pada).

Dakle, u položaju granične ravnoteže, sila \vec{F} može da zauzme bilo koji položaj koji je određen uslovom $\varphi = \varphi_0$. Geometrijsko mesto svih takvih položaja sile \vec{F} predstavlja omotač konusa. Ovaj konus naziva se konus trenja klizanja.

Trenje klizanja užeta o cilindričnu površ



$$\sum X_i = 0; \quad (F_T + dF_T) \cos \frac{d\varphi}{2} - F_T \cos \frac{d\varphi}{2} - dF_\mu^{gr} = 0$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -(F_T + dF_T) \sin \frac{d\varphi}{2} - F_T \sin \frac{d\varphi}{2} + dF_N = 0$$

$$\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$

$$F_T + dF_T - F_T - dF_\mu^{gr} = 0$$

$$-F_T \frac{d\varphi}{2} - dF_T \frac{d\varphi}{2} - F_T \frac{d\varphi}{2} + dF_N = 0$$

$$dF_T = dF_\mu^{gr}$$

$$F_T d\varphi = dF_N$$

$$dF_T = dF_\mu^{gr} = \mu_0 dF_N = \mu_0 F_T d\varphi$$

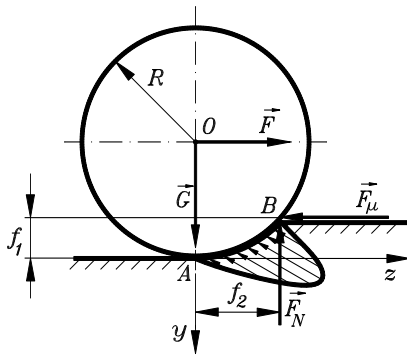
$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF_T}{F_T} = \mu_0 \int_0^\alpha d\varphi$$

$$\ln \frac{F_2}{F_1} = \mu_0 \alpha$$

$$F_2 = F_1 e^{\mu_0 \alpha}$$

$$F_1 e^{-\mu_0 \alpha} \leq F_2 \leq F_1 e^{\mu_0 \alpha}.$$

Trenje kotrljanja



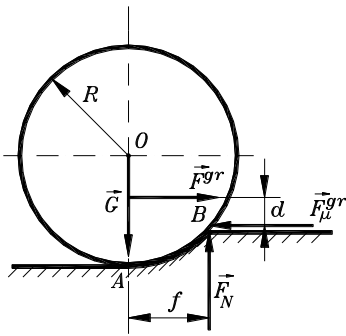
Kada se cilindrično telo kotrlja po površini drugog tela, na mestu njihovog dodira može se javiti otpor koji se naziva trenje kotrljanja.

-- $(\vec{F}^{gr}, \vec{F}_{\mu}^{gr})$ - spreg sila koji teži da pokrene cilindar, čiji je moment intenziteta $F^{gr}R$, i naziva se obrtni moment.

-- (\vec{F}_N, \vec{G}) - spreg sila koji se suprotstavlja kretanju cilindra i čiji se moment naziva moment trenja pri kotrljanju.

$$F_1^{gr} = \mu_0 F_N = \mu_0 G$$

$$F_2^{gr} = \frac{f}{R} F_N = \frac{f}{R} G$$



1) cilindar miruje ako je

$$F^{gr} \leq \min\{ \mu_0 G, \frac{f}{d} G \}$$

2) cilindar iz stanja mirovanja započinje kotrljanje bez klizanja ako je

$$\frac{f}{d} < \mu_0, \quad \frac{f}{d} G < F^{gr} \leq \mu_0 G$$

3) cilindar iz stanja mirovanja započinje klizanje bez kotrljanja ako je

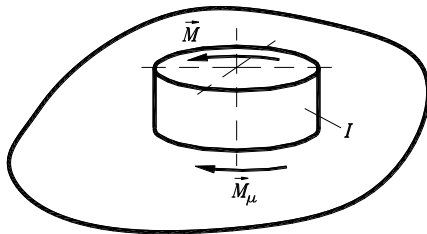
$$\mu_0 < \frac{f}{d}, \quad \mu_0 G < F^{gr} \leq \frac{f}{d} G$$

4) cilindar iz stanja mirovanja započinje kotrljanje sa klizanjem ako je

$$F^{gr} > \max\{ \mu_0 G, \frac{f}{d} G \}$$

Trenje obrtanja

$$M = M_\mu = M_\mu^{gr} = k_0 F_N$$



k_θ -koeficijent trenja obrtanja koji ima dimenziju dužine.