

## Lagranžove jednačine prve vrste

### Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj površi

Posmatra se kretanje tačke  $M$ , mase  $m$ , pod dejstvom aktivnih sila čija je rezultanta  $\vec{F}^a$ , po zadatoj idealnoj, stacionarnoj, holonomnoj, zadržavajućoj vezi čija je jednačina u odnosu na Dekartov koordinatni sistem  $Oxyz$

$$f(x, y, z) = 0.$$

Koristeći princip oslobađanja od veza, dejstvo veze može se zameniti silom  $\vec{R}$  koja, s obzirom na to da je veza idealna, ima pravac normale na površ, tj.  $\vec{R} = \vec{N}$ . Imajući na umu da je gradijent funkcije  $f(x, y, z)$  vektor koji ima pravac i smer spoljašnje normale  $\vec{n}$  na površ, tj.

$$\text{grad } f = |\text{grad } f| \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$$

reakcija  $\vec{R}$  idealne veze može da se izrazi u obliku

$$\vec{R} = \vec{N} = \lambda \text{grad } f.$$

Pri tome je sa  $\lambda$  označen Lagranžov množitelj veze, koji u opštem slučaju nije konstantna veličina.

Osnovna jednačina dinamike posmatrane tačke, koja se kreće po površi, glasi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^a + \lambda \text{grad } f,$$

pri čemu je

$$\vec{N} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Za izabrani Dekartov koordinatni sistem  $Oxyz$ , dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke u obliku

$$m\ddot{x} = X^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = Y^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = Z^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

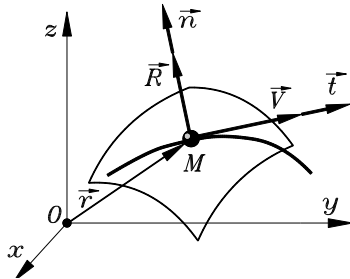
gde su  $X^a$ ,  $Y^a$  i  $Z^a$  projekcije rezultante  $\vec{F}^a$  svih aktivnih sila na odgovarajuće ose izabranog koordinatnog sistema. Ove diferencijalne jednačine nazivaju se Lagranžove jednačine I vrste. Ovaj sistem od tri jednačine, zajedno sa algebarskom jednačinom veze, obrazuje sistem od četiri jednačine sa četiri nepoznate  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $\lambda$ .

Pri rešavanju ovog sistema jednačina najpre se može odrediti nepoznati množitelj  $\lambda$ . Da bi se to uradilo, odredi se drugi izvod po vremenu jednačine veze, pa se u tako dobijenoj relaciji iskoriste izvodi  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  i  $\ddot{z}$ . Iz tako dobijene relacije može se odrediti množitelj  $\lambda$ . Za određivanje konačnih jednačina kretanja potrebno je već određeni množitelj iskoristiti, vodeći računa o tome da je u početnom trenutku tačka na površi i da je njena početna brzina tangenta na površ.

Koristeći određeni množitelj  $\lambda$ , intenzitet nepoznate reakcije veze  $\vec{N}$  dobija se kao

$$N = |\lambda \text{grad } f|,$$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$



Prethodno opisani postupak za određivanje Lagranžovog množitelja veze  $\lambda$  može se prikazati i na sledeći način. U tom cilju koristi se uslov da je brzina tačke upravna na reakciju veze, odnosno

$$\vec{V} \cdot \text{grad } f = 0.$$

Diferenciranjem po vremenu ovog uslova dobija se uslov za ubrzanje tačke, tj.

$$\vec{a} \cdot \text{grad } f + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt}(\text{grad } f) = 0.$$

Skalarnim množenjem leve i desne strane osnovne jednačine dinamike neslobodne tačke sa  $\text{grad } f$  i koristeći tako dobijenu relaciju, sledi da je množitelj veze

$$\lambda = -\frac{1}{\text{grad}^2 f} \left[ \vec{F}^a \cdot \text{grad } f + m\vec{V} \cdot \frac{d}{dt}(\text{grad } f) \right].$$

### Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj površi

Neka se posmatra kretanje tačke  $M$ , mase  $m$ , po zadatoj realnoj, stacionarnoj, holonomnoj, zadržavajućoj vezi. Tačka se kreće pod dejstvom aktivnih sila čija je rezultanta  $\vec{F}^a$ . Na tačku deluje i reakcija veze  $\vec{R}$  koja, s obzirom da je veza realna, ima dve komponente  $\vec{N}$  i  $\vec{F}_T$ . Normalna komponenta  $\vec{N}$  ima pravac normale na površ i određena je sa

$$\vec{N} = \lambda \text{grad } f.$$

Ako otpor kretanju tačke po površi potiče od suvog trenja, na osnovu Kulonovog zakona, sledi da se intenzitet sile  $\vec{F}_T$  može pisati u obliku

$$F_T = \mu N,$$

gde je  $\mu$  - koeficijent trenja klizanja pri kretanju. Vodeći računa o tome da je sila trenja  $\vec{F}_T$  kolinearna sa vektorom brzine  $\vec{V}$  tačke, pri čemu su im smerovi suprotni, važi

$$\vec{F}_T = -F_T \frac{\vec{V}}{V} = -\mu N \frac{\vec{V}}{V}.$$

Tada, na osnovu jednačine kretanja neslobodne tačke, vektorska diferencijalna jednačina kretanja posmatrane tačke glasi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^a + \lambda \text{grad } f - \mu N \frac{\vec{V}}{V}.$$

Projektovanjem leve i desne strane ove diferencijalne jednačine kretanja, na ose izabranog Dekartovog koordinatnog sistema  $Oxyz$ , dobijaju se skalarnе diferencijalne jednačine kretanja posmatrane neslobodne tačke u obliku

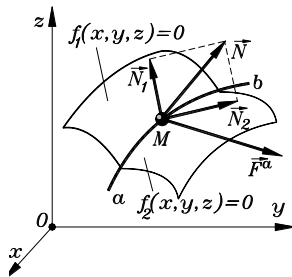
$$m\ddot{x} = X^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \left| \lambda \text{grad } f \right| \frac{\dot{x}}{V}, \quad m\ddot{y} = Y^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \mu \left| \lambda \text{grad } f \right| \frac{\dot{y}}{V},$$

$$m\ddot{z} = Z^a + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \mu \left| \lambda \text{grad } f \right| \frac{\dot{z}}{V}.$$

Kako je koeficijent trenja klizanja  $\mu$  poznat, tri skalarnе diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke, zajedno sa jednačinom veze, predstavljaju sistem jednačina sa četiri nepoznate veličine  $x, y, z$  i  $\lambda$ .

### Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj

Neka se tačka  $M$ , mase  $m$ , kreće po zadatoj, idealnoj, nepokretnoj krivoj  $ab$ , koja je određena presekom površi



$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Na tačku deluju aktivne sile čija je rezultanta  $\vec{F}^a$  i reakcija veze  $\vec{R}$ , čije su komponente  $\vec{N}_1$  i  $\vec{N}_2$  pravca normala na odgovarajuće površi, i stoga pripada ravni normalnoj na putanju  $ab$ , tj.

$$\vec{R} = \vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Kako važi

$$\vec{N}_1 = \lambda_1 \text{grad } f_1, \quad \vec{N}_2 = \lambda_2 \text{grad } f_2,$$

gde su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  Lagranžovi množitelji veza, tada je

$$\vec{R} = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2,$$

Polazeći od osnovne jednačine kretanja neslobodne tačke, vektorska diferencijalna jednačina kretanja posmatrane tačke dobija oblik

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2.$$

Projektovanjem leve i desne strane ove jednačine, na ose nepokretnog, Dekartovog koordinatnog sistema  $Oxyz$ , dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke u obliku

$$m\ddot{x} = X^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = Y^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = Z^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

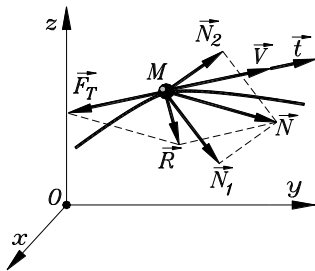
Ove tri Lagranžove jednačine prve vrste, zajedno sa jednačinama veza, predstavljaju sistem od pet jednačina sa pet nepoznatih  $x, y, z, \lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

Analogno određivanju množitelja veze u slučaju kretanja tačke po idealnoj stacionarnoj površi, mogu se i u ovom slučaju odrediti množitelji  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Sa određenim Lagranžovim množiteljima veza  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , moguće je odrediti intenzitete komponenti reakcije veze,  $N_1$  i  $N_2$ , u obliku

$$N_i = |\lambda_i \text{grad } f_i|, \quad i = (1, 2), \quad N_i = |\lambda_i| \sqrt{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)^2}. \quad i = (1, 2)$$

### Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj krivoj

Neka se posmatra kretanje tačke  $M$ , mase  $m$ , koja se kreće pod dejstvom aktivnih sila čija je rezultanta  $\vec{F}^a$  po zadatoj, realnoj, nepokretnoj krivoj definisanoj presekom površi  $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0$ .



Na tačku deluje i reakcija veze  $\vec{R}$  koja ima dve komponente: normalnu komponentu  $\vec{N}$ , koja pripada ravni normalnoj na putanju i komponentu  $\vec{F}_T$  koja predstavlja silu trenja klizanja. Tada važi

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_T.$$

Za normalnu komponentu  $\vec{N}$  važi

$$\vec{N} = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2,$$

a intenzitet sile trenja klizanja  $\vec{F}_T$ , saglasno Kulonovim zakonima trenja, određen je kao

$$F_T = \mu N.$$

Vodeći računa da je vektor  $\vec{F}_T$  usmeren suprotno od vektora brzine  $\vec{V}$  tačke, važi

$$\vec{F}_T = -\mu N \frac{\vec{V}}{V}.$$

Tada, polazeći od osnovne jednačine kretanja neslobodne tačke, dobija se diferencijalna jednačina kretanja tačke po zadatoj nepokretnoj hrapavoj krivoj u obliku

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2 - \mu N \frac{\vec{V}}{V}.$$

Iz ove jednačine mogu se dobiti skalarne diferencijalne jednačine kretanja tačke u odnosu na Dekartov koordinatni sistem  $Oxyz$ , tj.

$$m\ddot{x} = X^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} - \mu |\lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2| \frac{\dot{x}}{V},$$

$$m\ddot{y} = Y^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} - \mu |\lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2| \frac{\dot{y}}{V},$$

$$m\ddot{z} = Z^a + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} - \mu |\lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2| \frac{\dot{z}}{V}.$$

Ako je poznat koeficijent trenja klizanja  $\mu$ , tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke, zajedno sa jednačinama veza, predstavljaju sistem od pet jednačina sa pet nepoznatih veličina  $x, y, z, \lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

## Ojlerove jednačine kretanja neslobodne tačke

### Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj

Pri kretanju tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj, reakcija veze  $\vec{R}$  nalazi se u normalnoj ravni, pa se u opštem slučaju može razložiti na komponentu  $\vec{N}_n$  u pravcu normale i komponentu  $\vec{N}_b$  u pravcu binormale, tj.

$$\vec{R} = \vec{N} = \vec{N}_n + \vec{N}_b.$$

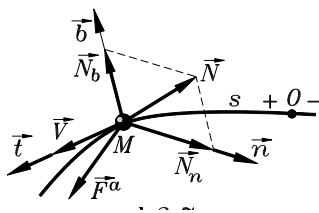
Osnovna diferencijalna jednačina kretanja neslobodne tačke je

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{N}_n + \vec{N}_b.$$

Projektovanjem leve i desne strane prethodne jednačine, na ose prirodnog trijedra, u tački krive koja predstavlja trajektoriju tačke, dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke

$$m\ddot{s} = F_t^a(s, \dot{s}, t), \quad m \frac{\dot{s}^2}{R_K} = F_n^a(s, \dot{s}, t) + N_n, \quad 0 = F_b^a(s, \dot{s}, t) + N_b,$$

gde su  $F_t^a, F_n^a$  i  $F_b^a$  - projekcije rezultante aktivnih sila koje deluju na tačku na ose tangente, glavne normale i binormale,  $s$  – lučna koordinata, a  $R_K$  - poluprečnik krivine krive u datoj tački.

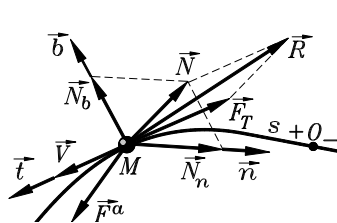


Ove jednačine nazivaju se Ojlerove jednačine kretanja neslobodne tačke ili diferencijalne jednačine kretanja tačke po zadatoj krivoj u prirodnom obliku. Iz ove tri jednačine mogu se odrediti tri nepoznate veličine  $s$ ,  $N_n$  i  $N_b$ . Intenzitet reakcije takve idealne veze određen je sa

$$N = \sqrt{N_n^2 + N_b^2}.$$

### Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj krivoj

Kada se tačka  $M$  kreće po realnoj krivoj, reakcija veze  $\vec{R}$  može se razložiti na tri komponente: dve komponente u normalnoj ravni -  $\vec{N}_n$  u pravcu glavne normale i



$\vec{N}_b$  u pravcu binormale, i komponentu  $\vec{F}_T$  u pravcu tangente, tj.

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_T = \vec{N}_n + \vec{N}_b + \vec{F}_T,$$

odnosno

$$\vec{R} = N_n \vec{n} + N_b \vec{b} - F_T \frac{\vec{V}}{V}.$$

Pri tome je intenzitet sile trenja klizanja  $\vec{F}_T$  određen kao

$$F_T = \mu N = \mu \sqrt{N_n^2 + N_b^2}.$$

Sada je

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{N}_n + \vec{N}_b + \vec{F}_T.$$

Projektovanjem leve i desne strane prethodne jednačine, na ose prirodnog trijedra, koristeći činjenicu da je  $\vec{V} = \dot{s}\vec{t}$ , dobijaju se skalarne diferencijalne jednačine kretanja posmatrane tačke

$$m\ddot{s} = F_t^a - \mu \sqrt{N_n^2 + N_b^2} \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}, \quad m \frac{\dot{s}^2}{R_K} = F_n^a + N_n, \quad 0 = F_b^a + N_b.$$

Ove tri jednačine predstavljaju sistem jednačina odakle je moguće odrediti tri nepoznate:  $s = s(t)$  - zakon kretanja tačke po zadatoj putanji i projekcije reakcije veze  $N_n$  i  $N_b$ .