# Dinamika mat. tačke

<u>Dinamika</u>, kao oblast klasične mehanike, proučava kretanje materijalnih objekata u 3D-euklidskom prostoru, a pod dejstvom sila koje deluju na njih.

U dinamici se, dakle, uspostavlja veza između kretanja posmatranog materijalnog objekta i sila koje deluju na njega. Za opis kretanja tog objekta se pri tome koriste metode kinematike, dok se analiza sila koje deluju na njega vrši prema zakonima njihovog slaganja i razlaganja koji se proučava u statici.

Osnovni pojmovi dinamike su: prostor, vreme, masa i sila.

(Sila predstavlja meru interakcije, dejstva jednog materijalnog objekta na drugi. S obzirom da interakcije između mat. objekata mogu biti kontaktne i beskontaktne, to i sile mogu biti kontaktne i beskontaktne. <u>Pri kontaktnim interakcijama</u> dejstvo jednog mat. objekta na drugi prenosi se preko kontaktnih tačaka ta dva tela (mat. objekti su u neposrednom kontaktu). Sile tada deluju u svakoj tački kontakta svakog od objekata sa onim drugima, pri čemu za njih važi zakon akcije i reakcije.

<u>Pri beskontaktnim interakcijama</u>, objekti nisu u direktnom kontaktu, pa se dejstvo jednog materijalnog objekta na drugi, prema Njutnu, prenosi po modelu „dejstva na daljini" (Njutnova gravitaciona sila). Prema konceptima moderne fizike dejstvo jednog objekta na drugi prenosi se posredstvom polja i, tzv. virtuelnih čestica.

Pri beskontaktnim interakcijama svaka mat. tačka jednog mat. objekta trpi dejstvo svake druge drugog tela, tj. izložena je dejstvu sile (zapreminske, kontinualno raspoređene sile).

Primeri kontaktnih sila su reakcije veza, a beskontaktnih sila sila gravitacije.

S obzirom na vrstu mehaničkog modela mat. objekata čije se kretanje posmatra, dinamika se deli na:

- dinamiku mat. tačke
- dinamiku krutog tela
- dinamiku mat. sistema (skup mat. tačaka diskretno ili kontinualno raspoređenih u delu prostora, takav da promena stanja kretanja nekih tačaka dovodi do promene stanja kretanja ostalih tačaka sistema)

<u>Dinamika mat. tačke</u> – proučava kretanje mat. objekata čiji je mehanički model materijalna tačka, u 3D-euklidskom prostoru, a pod dejstvom sila.

Teorija dinamike mat. tačke, tj. dinamike uopšte, bazira na Njutnovim aksiomima („Matematički principi filozofije prirode," 1687. god.). Ovi aksiomi su:

(1) <u>Zakon inercije</u>. - Mat. tačka ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja, sve dok je dejstvo drugog mat. objekta ne prisili da to stanje promeni.

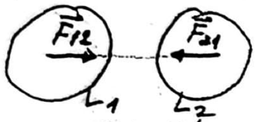
Tačka na koju ne deluju drugi mat. objekti predstavlja <u>izolovanu tačku</u>.

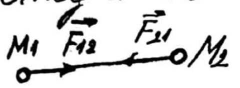
Svojstvo materije da sama od sebe ne menja svoje stanje kretanja naziva se <u>tromost, inertnost</u>; mera tromosti mat. tačke (materije) je masa, a tela pored mase i momenti inercije

Mirovanje i ravnomerno pravolinijsko kretanje mat. tačke, odnosno, i ravnomerno pravolinijsko translatorno kretanje tela, predstavljaju inercijalna kretanja. To su kretanja za koje je: $\vec{a}=0 \Rightarrow \vec{v}=const \Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_0=0$, $\vec{v}=\vec{v}_0\neq 0$.
U vezi sa inercijalnim kretanjem, koordinatni sistemi se dele na: inercijalne i neinercijalne.
Inercijalna sila predstavlja otpor koji mat. tačka iskazuje svom ubrzavanju.

(2) Osnovni zakon kretanja. - Ubrzanje tačke proporcionalno je sili koja deluje na nju, a obrnuto srazmerna njenoj masi (Ojler 1736).
$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow m\vec{a}=\vec{F}$ $\left(1N=1kg\frac{m}{s^2}\right)$
Njutnova verzija: Promena količine kretanja mat. tačke na nekom intervalu vremena srazmerna je impulsu sile na tom intervalu vremena.
Napomena. - Njutn nije koristio diferencijalni račun, već infinitezimalnu algebru i geometriju.

(3) Zakon akcije i reakcije. - Mat. objekti deluju jedan na drugi silama istog intenziteta, a suprotnog smera.

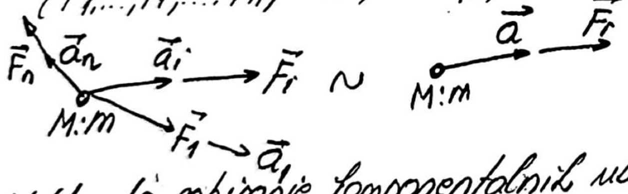



$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$
$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$ (vektorska suma sila)

Izvori sila, prema Njutnu, su materijalni objekti - Njutnove sile.

(4) Zakon nezavisnog dejstva sile. - Ako na mat. tačku M deluje sistem sila $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\ldots,\vec{F}_i,\ldots,\vec{F}_n)$, onda ubrzanje $\vec{a}_i$ od bilo koje sile $\vec{F}_i$, $i=1,2,\ldots,n$ tog sistema sila ne zavisi od dejstva ostalih sila sistema:
$\vec{F}_i \rightarrow \vec{a}_i \Rightarrow m\vec{a}_i=\vec{F}_i$, $i=1\ldots n$, $\vec{a}_i$ - komponentalna ubrzanja tačke
$\sum_i m\vec{a}_i=\sum_i \vec{F}_i$ ; $\sum_i m\vec{a}_i=m\sum_i\vec{a}_i$ i $\sum_i \vec{a}_i=\vec{a}$ $\Rightarrow \boxed{m\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}$ $m\vec{a}=\vec{F}_r$
$(\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_i,\ldots\vec{F}_n)\sim\vec{F}_r$, $\vec{F}_r=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ - rezultanta sučeljnog sistema sila koji deluju na tačku M




Vektorsko sabiranje komponentalnih ubrzanja $\vec{a}_i$, $i=1,\ldots,n$, ubrzanja tačke $\vec{a}$ vrši se primenom pravila paralelograma za sabiranje vektora. Da bi se i vektori sila $\vec{F}_i$, $i=1\ldots n$ mogli sabrati primenom ovog pravila, sile ne smeju zavisiti od ubrzanja. Sile (njihove vektorske funkcije) zavise u opštem slučaju od: vremena t, položaja tačke M u odnosu na referentni objekat i njene brzine. Vektorska funkcija sile, dakle, ima oblik: $\boxed{\vec{F}=\vec{F}(t,\vec{r},\vec{v})} \Rightarrow \vec{F}=\vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})$

Njutnove aksiome važe u inercijalnim referentnim objektima (KS koji miruju ili se kreću ravnomerno pravolinijski translatorno), a za slobodnu mat. tačku koja se kreće u odnosu na referentne objekte brzinom mnogo manjom od brzine svetlosti.

Dakle, zakon kretanja slobodne tačke ($n=3$ ili $n=2$) čije se kretanje odvija samo pod dejstvom sistema aktivnih sila $\vec{F}_i^{akt}$ u odnosu na inercijalni referentni objekat, ima oblik:

$$m\vec{a}=\sum_i \vec{F}_i^{akt}\ ; \quad m\vec{a}=\vec{F}_r^{akt}$$

Ako je tačka vezana ($n<3$, ili $n<2$) onda je tu tačku potrebno prvo učiniti slobodnom primenom principa o oslobađanju od veza. To znači da se moraju (fizički) ukloniti sve veze koje ograničavaju kretanje materijalne tačke u odgovarajućem prostoru, a njihovo dejstvo na tu tačku zameniti silama koje se nazivaju reakcije veza. Zakon kretanja za vezanu tačku ima oblik:

$$m\vec{a}=\vec{F}_r^{akt}+\sum_{j=1}^{m}\vec{R}_j,$$ gde su $\vec{R}_j$ reakcije odgovarajućih veza. Reakcije veza koje deluju na tačku su delimično poznate sile, tj. sile nepoznatog inteziteta, najčešće, a vrlo često i nepoznatog smera.

Zakon kretanja slobodne tačke: $m\vec{a}=\vec{F}_r^{akt}$ koristi se za rešavanje direktnog i indirektnog zadatka dinamike.

Direktni zadatak. - Poznat zakon, konačna jednačina kretanja tačke u odnosu na nepokretan pol O: $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Potrebno je odrediti silu $\vec{F}$ koja deluje na tačku M tokom kretanja.

$$\vec{r}=\vec{r}(t),\ \vec{v}=\dot{\vec{r}}(t),\ \vec{a}=\ddot{\vec{r}}(t)\ \Rightarrow \vec{F}(t)=m\ddot{\vec{r}}(t)$$

Indirektni zadatak. - Poznata funkcija sile koja deluje na tačku M: $\vec{F}=\vec{F}(t,\vec{r},\vec{v})$, tj. $\vec{F}=\vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})$ potrebno je odrediti konačnu jednačinu kretanja tačke $\vec{r}=\vec{r}(t)$.

Kako je $\vec{a}=\ddot{\vec{r}}$, zakon kretanja se može napisati u obliku:

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}) \qquad (A)$$

Ova jednačina u matematičkom smislu predstavlja diferencijalnu jednačinu II reda po funkciji $\vec{r}=\vec{r}(t)$ u vektorskom obliku.

Opšte rešenje ove jednačine ima oblik: $\vec{r}=\vec{r}(t,\vec{C}_1,\vec{C}_2)$, gde su $\vec{C}_1$ i $\vec{C}_2$ vektorske, integracione konstante. U smislu mehanike ovo rešenje predstavlja familiju trajektorija tačke M koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu kretanja te tačke (A).

Da bismo iz opšte rešenja jednačine (A), $\vec{r}=\vec{r}(t,\vec{C}_1,\vec{C}_2)$ dobili partikularno rešenje potrebno je znati konstantne $\vec{C}_1$ i $\vec{C}_2$. U mehanici konstante $\vec{C}_1$ i $\vec{C}_2$ se određuju iz početnih uslova kretanja tačke, tj. početnog stanja kretanja tačke. To znači da se moraju poznavati:

- početni položaj tačke: $\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)$ i
- početna brzina tačke: $\vec{v}_0=\dot{\vec{r}}(t_0)$,

tako da su konstantne integracije: $\vec{C}_1=\vec{C}_1(t_0,\vec{r}_0,\vec{v}_0)$ i $\vec{C}_2=\vec{C}_2(t_0,\vec{r}_0,\vec{v}_0)$

Partikularno rešenje jednačine (A) tada dobija oblik:

$$\vec{r}=\vec{r}(t;t_0,\vec{r}_0,\vec{v}_0)$$

i predstavlja konačnu jednačinu kretanja tačke u vektorskom obliku, odnosu jednačinu trajektorije tačke.

→

Diferencijalne jednačine kretanja tačke u odnosu Dekartov koordinatni sistem. - Neka na slobodnu mat. tačku $M$ mase $m$ deluje sistem aktivnih sila, čija je rezultanta $\vec{F}_r = \vec{F}_r(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}} = \vec{v})$ : $\vec{F}_r \sim (\vec{F}_1 \ldots \vec{F}_i \ldots \vec{F}_n)$, $\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i$, $\vec{F}_i, i = 1, 2, \ldots n$ i neka su poznate projekcije sile $\vec{F}_r$, odnosno, sila sistema, na ose nepokretnog DKS $Oxyz$:

$$\vec{F}_r = X_r(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\vec{i} + Y_r(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\vec{j} + Z_r(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\vec{k},$$

gde je: $X_r = \sum_i X_i$, $Y_r = \sum_i Y_i$, $Z_r = \sum_i Z_i$.

Kako je ubrzanje $\vec{a}$ tačke u DKS $Oxyz$: $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, to se diferencijalna jednačina kretanja tačke u vektorskom obliku, tj. zakon kretanja tačke (osnovni zakon dinamike), može napisati u obliku:

$$m\vec{a} = \vec{F}_r \Rightarrow m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) = X_r\vec{i} + Y_r\vec{j} + Z_r\vec{k}. \quad (1)$$

Projektovanjem leve i desne strane jednačine (1) na ose DKS $Oxyz$, dobija se sistem 3 skalarne diferencijalne jednačine drugog reda po funkcijama: $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$, koje predstavljaju konačne jednačine kretanja tačke u odnosu na DKS $Oxyz$:

$$m\ddot{x} = X_r(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (2)$$
$$m\ddot{y} = Y_r(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (3)$$
$$m\ddot{z} = Z_r(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (4)$$

Sistem jednačina (2), (3) i (4) predstavlja sistem diferencijalnih jednačina kretanja slobodne tačke u DKS $Oxyz$. Opšte rešenje ovog sistema ima oblik:

$$x = x(t, C_j),\ y = y(t, C_j),\ z = z(t, C_j),\ j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Vrednosti 6 integracionih konstanti $C_j$, $j = 1, 2, \ldots, 6$ određuju se iz početnih uslova:

$$t_0 = 0, \left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \Rightarrow x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0) \text{ i } z_0 = z(t_0) \\ \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0) \Rightarrow \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0),\ \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0) \text{ i } \dot{z}_0 = \dot{z}(t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow C_j = C_j(t, t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

Rešenje sistema jednačina (2), (3) i (4):

$$x = x(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);\ y = y(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \text{ i } z = z(t; t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

predstavlja partikularno rešenje tog sistema jednačina.

Ako se posmatra kretanje slobodne tačke $M$ u ravni $Oxy$, tada je:

$$z(t) = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = 0 \text{ i } \ddot{z}(t) = 0,$$

pa sistem jednačina (2), (3), i (4) postaje:

$$\left. \begin{array}{ll} m\ddot{x} = X_r(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) & (2') \\ m\ddot{y} = Y_r(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) & (3') \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} x = x(t, C_j),\ y = y(t, C_j) \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\} \text{opšte rešenje sistema jednačina (2') i (3')}$$

$$0 = Z_r(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (4').$$

Sistem jednačina (2') i (3') predstavlja sistem diferencijalnih jednačine kretanja slobodne tačke u ravni $Oxy$, dok jednačina (4') gubi značenje diferencijalne jednačine kretanja. Jednačina (4') zove se jednačina kompatibilnosti sila. Ona pokazuje da se kretanje slobodne tačke $M$ u ravni $Oxy$ može realizovati pod dejstvom sistema aktivnih sila čija rezultanta $\vec{F}_r$

u svakom trenutku vremena leži u ravni kretanja tačke M, $Oxy$.

Teorema. – Potreban i dovoljan uslov kretanja tačke u ravni je da sila $F_r$ pod čijim se dejstvom tačka kreće deluje u ravni određenoj vektorima početne brzine $\vec{v}_0$ i početne sile $\vec{F}_{r0} = \vec{F}_r(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0)$

Posmatrajmo sada vezanu tačku M koja se kreće u ravni $Oxy$. Broj stepeni slobode takve tačke je $n=1$, pa je konačna jednačina kretanja takve tačke:
$q = q(t)$,
gde je $q$ generalisana koordinata tačke M, pomoću koje se mogu odrediti njene Dekartove koordinate:
$x = x(q)$ i $y = y(q)$. $\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(q)$
Brzina $\vec{v} = \{\dot{x}, \dot{y}\}$ tačke M je tada:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = \frac{dx}{dq}\cdot\frac{dq}{dt} \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dq}\dot{q} \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}(q,\dot{q}) \\ \dot{y} = \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dt} \Rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dq}\dot{q} \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}(q,\dot{q}) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}(q,\dot{q})},$$

dok je njeno ubrzanje $\vec{a} = \{\ddot{x}; \ddot{y}\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial q}\ddot{q} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}(q,\dot{q},\ddot{q}) \\ \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial y}{\partial q}\ddot{q} \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{y}(q,\dot{q},\ddot{q}) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}(q,\dot{q},\ddot{q})}$$

Nakon oslobađanja od veze, sistem sila koji deluje na tačku se sastoji od aktivnih sila i reakcije veze $\vec{R}$, pa dif. jednačina kretanja tačke u vektorskom obliku glasi:

$$\boxed{m\vec{a}(q,\dot{q},\ddot{q}) = \vec{F}_r + \vec{R}}, \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} m\ddot{x}(q,\dot{q},\ddot{q}) = X_r + R_x & (2'') \\ m\ddot{y}(q,\dot{q},\ddot{q}) = Y_r + R_y & (3'') \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{3 nepoznate fun.} \\ q = q(t);\ R_x = R_x(t) \text{ i} \\ R_y = R_y(t) \end{array}$$

Ako je pravac reakcije veze $\vec{R}$ poznat, onda se iz sistema jednačina (2'') i (3'') mogu se odrediti funkcije: $q = q(t)$ i $\vec{R} = \vec{R}(t)$, tj. $R_x = R_x(t)$ i $R_y = R_y(t)$

Napomena. – Veze koje ograničavaju kretanje tačke M u klasičnoj mehanici su geometrijske, stacionarne i zadržavajuće, tj. veze tipa: laki kruti štap, lako neistegljivo uže, kruta podloga.

## Ojlerove diferencijalne jednačine

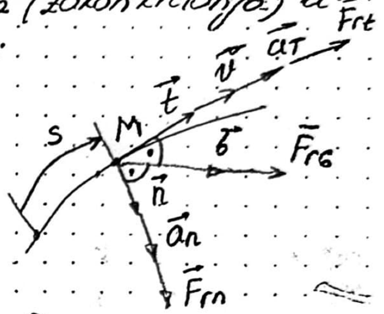
Pretpostavimo da je poznata linija putanje, tj., trajektorija tačke M u odnosu na nepokretni DKS Oxyz. Kretanje tačke M po trajektoriji biće poznato ukoliko je poznat zakon puta $s=s(t)$. Ako u položaju M tačke na trajektoriji u proizvoljnom trenutku $t$ postavimo prirodan triedar (ort tangente na trajektoriju u $M-\vec{t}$, ort glavne normale na trajektoriju $M-\vec{n}$ i ort binormale na trajektoriju u $M-\vec{b}$), onda je:

$\vec{v}=v\vec{t}$, $v=\dot{s}$

$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$, gde je: $\vec{a}_t=a_t\vec{t}$, $a_t=\dot{v}=\ddot{s}$ - tangentno ubrzanje

$\vec{a}_n=a_n\vec{n}$, $a_n=\frac{v^2}{R_k}$ - normalno ubrzanje

Neka se kretanje posmatrane tačke odvija pod dejstvom sistema sila čija je rezultanta: $\vec{F}_r=F_{rt}\vec{t}+F_{rn}\vec{n}+F_{rb}\vec{b}$, gde su $F_{rt}$, $F_{rn}$ i $F_{rb}$ projekcije rezultante $\vec{F}_r$ na ose prirodnog triedra. Diferencijalna jednačina kretanja (zakon kretanja) u vektorskom obliku: $m\vec{a}=\vec{F}_r$, može se sada dati u obliku:




$m(a_t\vec{t}+a_n\vec{n})=F_{rt}\vec{t}+F_{rn}\vec{n}+F_{rb}\vec{b}$, (1)

pa se iz nje nakon projektovanja leve i desne strane na ose prirodnog triedra dobija sistem od 3 skalarne jednačine:

$ma_t=F_{rt} \Rightarrow m\ddot{s}=F_{rt}$ (2)

$ma_n=F_{rn} \Rightarrow m\frac{v^2}{R_k}=F_{rn}$ (3)

$ma_b=F_{rb} \Rightarrow 0=F_{rb}$ (4)

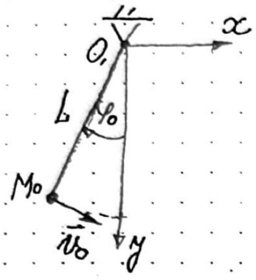
} Ojlerove diferencijalne jednačine

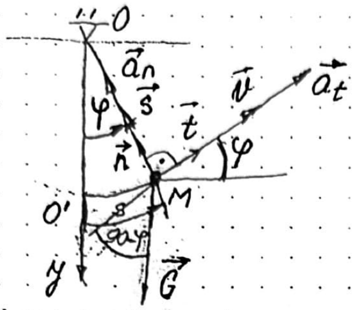
Ako je poznat zakon promene projekcije rezultante sila $\vec{F}_r$ na osu tangente prirodnog triedra: $F_{rt}=F_{rt}(t,s,\dot{s})$, jednačina (2) predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda po funkciji $s=s(t)$, tj. diferencijalnu jednačinu kretanja tačke po trajektoriji. Opšti integral te jednačine je: $s=s(t,C_1,C_2)$, a zakon puta $s=s(t)$ se dobija iz tog opšteg integrala za početne uslove: $t_0=0$, $s_0=s(t_0)$ i $v_0=\dot{s}(t_0)=\dot{s}_0$

Jednačine (3) i (4) nakon integracije jednačine (2), a u slučaju slobodne tačke, predstavljaju jednačine kompatibilnosti za sistem sila koji deluje na tu slobodnu tačku i dovodi je u kretanje po datoj trajektoriji.

U slučaju da se posmatra kretanje vezane tačke u ravni (npr. Oxy) iz jednačina (3) i (4) se nakon integracije jednačine (2) određuju nepoznate reakcije veza.

(4) Tačka M mase m koja je lakim, neistegljivim užetom dužine L vezana za nepokretnu tačku O, može da se kreće u vertikalnoj ravni Oxy. U početnom položaju $M_0$ tačke uže je pomereno od vertikalne ose Oy za ugao otklona $\varphi_0$, a tački M je saopštena početna brzina $\vec{v}_0$ u ravni Oxy. Odrediti:
a) silu u užetu u proizvoljnom položaju tačke M
b) zakon kretanja tačke M u slučaju malih otklona $\varphi$ užeta od ose Oy, kada je $\sin\varphi \approx \varphi$.




Linija putanje tačke M je kružnica sa centrom u tački, a poluprečnika $R = \overline{OM} = L$ (uže je neistegljivo). Položaj tačke M u proizvoljnom trenutku t određen je lučnom koordinatom $s = \overset{\frown}{O'M}$, gde je O', tačka od koje se meri lučna koordinata s i koja se nalazi u preseku kružne trajektorije tačke i ose Oy. Lučna koordinata s se može povezati sa uglom otklona užeta $\varphi$ čiji smer merenja od ose Oy do pravca užeta OM, prati smer porasta lučne koordinate s:
$\boxed{s = L\varphi}$ ($\varphi$ - centralni ugao luka kružnice OM)
U položaju M tačke na kružnici vezan je prirodni triedar. Vektor brzine $\vec{v}$ i vektor tangentnog ubrzanja $\vec{a}_t$ tačke u posmatranom trenutku t se pretpostavljaju u smeru ose tangentne prirodnog triedra (prate smer porasta lučne koordinate). Vektor normalnog ubrzanja $\vec{a}_n$ je u pravcu i smeru ose glavne normale u posmatranom položaju tačke na trajektoriji. Brzina v, tangentno ubrzanje $a_t$ i normalno ubrzanje $a_n$ tačke M u trenutku t su:

$$v = \dot{s} = L\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = v/L} \quad (1)$$

$$a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow a_t = \frac{dv}{d\varphi}\dot{\varphi} \Rightarrow \boxed{a_t = \frac{v\,dv}{L\,d\varphi}} \quad (2)$$

i $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. (3)

Pošto je tačka M vezana užetom za nepokretnu tačku O, tačka se mora osloboditi veze, tj. uže se mora preseći u okolini tačke M, a njeno dejstvo se zameniti silom u užetu $\vec{S}$. Sila $\vec{S}$ ima pravac užeta u okolini tačke M, a smer ka tački vešanja (tački O). Pored sile u užetu $\vec{S}$ na tačku deluje i sila Zemljine teže $\vec{G}$, pa je diferencijalna jednačina kretanja tačke M u vektorskom obliku:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{S}, \quad (4)$$

a njoj pripadajuće Ojlerove diferencijalne jednačine imaju oblik:

$$m\dot{v} = G_t + S_t \Rightarrow \boxed{m\dot{v} = -mg\sin\varphi} \Rightarrow \boxed{\dot{v} = -g\sin\varphi} \quad (5)$$

$$m\frac{v^2}{L} = G_n + S_n \Rightarrow \boxed{m\frac{v^2}{L} = S - mg\cos\varphi} \quad (6)$$

$$0 = 0 \quad (7)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke po trajektoriji (5) predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda po funkciji $\varphi = \varphi(t)$, jer je:
$a_T = \dot{v} = \frac{d}{dt}(L\dot{\varphi}) = L\ddot{\varphi}$;
što znači da se ona može napisati i u obliku: $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\sin\varphi$. Međutim, rešenje ove jednačine, $\varphi = \varphi(t)$, nije moguće odrediti preko elementarnih funkcija, već specijalnih funkcija. U tom smislu iz jednačine (5) biće određen samo njen prvi integral $v = v(\varphi)$ kojim se određuje brzina $v$ tačke M u funkciji od veličine položaja tačke M, tj. ugla otklona užeta, $\varphi$.
Ako se ima u vidu (2), tj. da je: $a_t = \dot{v} = \frac{v\,dv}{d\varphi}$, to jednačina (5) postaje:

$$\boxed{\frac{v\,dv}{L\cdot d\varphi} = -g\sin\varphi} \qquad (6)$$

Nakon razdvajanja promenljivih $v$ i $\varphi$ u (6) i njene integracije dobija se:

$$v\,dv = -gL\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = -gL\int_{-\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = gL[\cos\varphi - \cos(-\varphi_0)] \Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2gL(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \quad (8)$$

(Početni položaj je određen uglom $-\varphi_0$, jer je smer merenja ugla početnog otklona užeta od ose Oy do pravca užeta u početnom trenutku to suprotan od smera merenja ugla otklona užeta u trenutku $t$).
Sada se može pristupiti određivanju sile u užetu S, tj. funkcije $S = S(\varphi)$ iz Ojlerove jednačine (7):

$$S = \frac{mv^2}{L} + mg\cos\varphi \xRightarrow{(8)} \boxed{S = \frac{mv_0^2}{L} - 2mg\cos\varphi_0 + 3mgL\cos\varphi}. \quad (9)$$

Funkcija (9) pokazuje da sila u užetu u svakom trenutku zavisi od početnih uslova kretanja tačke i od ugla otklona užeta, $\varphi$.
Kako je veza tipa uže jednostrano zadržavajuća, sila u užetu mora biti:
$S \geq 0$. (10)
Položaj $\varphi_1$ u kome veza prestaje da bude zadržavajuća određen je jednačinom: $\boxed{S(\varphi_1) = 0}$ tj. iz jednačine:

$$\frac{mv_0^2}{L} - 2mg\cos\varphi_0 + 3mgL\cos\varphi_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\varphi_1 = \frac{1}{3}\left(\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{gL}\right)} \quad (10)$$

b). U slučaju malih otklona užeta, tj. kada važi $\sin\varphi \approx \varphi$, diferencijalna jednačina kretanja tačke po kružnoj trajektoriji (5) dobija oblik:

$$\dot{v} \approx -g\varphi \qquad (11)$$

gde je: $a_T = \dot{v} = L\ddot{\varphi}$, pa (11) postaje:

$$L\ddot{\varphi} = -g\varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0} \text{ i } \boxed{\omega^2 = \frac{g}{L}};\ \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (12)$$

kružna frekvenca sistema (mat. klatna)

Jednačina (12) je nepotpuna, homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina jednačine (12) je: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, pa su njeni koreni $\lambda_1 = i\omega$ i $\lambda_2 = -i\omega$, pa opšte rešenje jednačine (12) glasi:

$$\varphi = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t, \qquad (13)$$

Za određivanje integracionih konstanti $C_1$ i $C_2$ potreban je i prvi izvod po vremenu funkcije (13):

$$\dot{\varphi} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t. \qquad (14)$$

Iz (13) i (14) za početne uslove:

$$t_0 = 0, \quad \boxed{\varphi(t_0) = -\varphi_0} \quad i \quad \boxed{\dot{\varphi}(t_0) = \frac{v(t_0)}{L} = \frac{v_0}{L}} \qquad (15)$$

sledi da su integracione konstante

$$\boxed{C_1 = -\varphi_0} \quad i \quad \boxed{C_2 = \frac{v_0}{L\omega}},$$

pa je zakon kretanja tačke, tj. klatna:

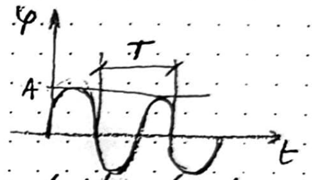
$$\boxed{\varphi(t) = -\varphi_0\cos\omega t + \frac{v_0}{L\omega}\sin\omega t} \qquad (16)$$

Uvođenjem novih konstanti $A$ i $\alpha$ tako da je:

$$C_1 = A\cos\alpha \quad i \quad C_2 = A\sin\alpha;$$

odakle je:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad i \quad tg\alpha = \frac{C_1}{C_2},$$




rešenje (13), odnosno (16), može se napisati u obliku:

$$\boxed{\varphi(t) = A\cos(\omega t - \alpha)} \qquad (17)$$

Kretanje opisano funkcijom (17) je takvo da se rastojanje tačke od neke nepokretne tačke periodično povećava i smanjuje. Takvo kretanje naziva se oscilatorno.

Vreme koje protekne između dva uzastopna prolaska tačke kroz isti položaj, u istom smeru i istom brzinom predstavlja period oscilovanja i iznosi: $T = 2\pi/\omega \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Period oscilovanja ne zavisi od početnih uslova kretanja tačke, tj. klatna.

Napomena. - Tačka koja se kreće po glatkoj kružnici u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile Zemljine teže, naziva se matematičko klatno.