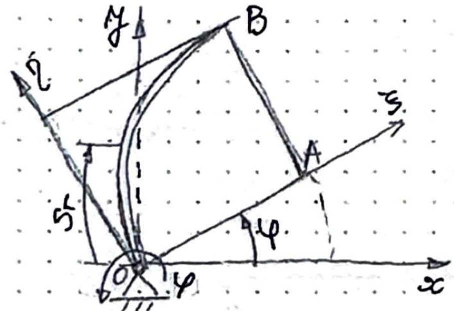
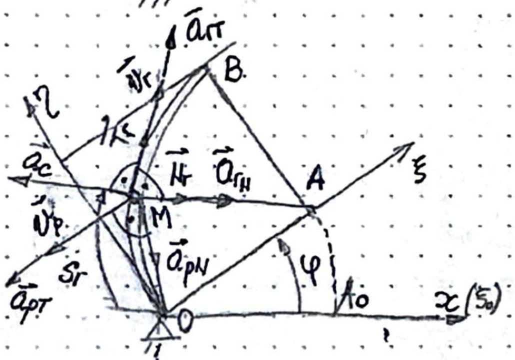
Kinematika složenog kretanja tačke

① Kvadratna ploča stranice R obrće se po zakonu $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$ oko ose upravne na ravan ploče, koja prolazi kroz nepokretnu tačku O ploče. U ploču je urezan žljeb poluprečnika R sa centrom u temenu A ploče. Duž žljeba se kreće tačka M po zakonu: $s_r = \overset{\frown}{OM} = \frac{1}{\sqrt{2}} R\pi t^2$. Naći apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku njenog izlaska iz žljeba (u položaju B)





Kretanje tačke M po (na) telu, koje se i samo kreće u odnosu na nepokretan referentni objekat predstavlja primer složenog kretanja tačke. To znači da se kretanje tačke M u odnosu na nepokretan DKS $Oxyz$, apsolutno kretanje tačke, može razložiti na komponentalna kretanja:

– relativno kretanje tačke M – kretanje tačke po (na) telu, tj. u odnosu na pokretan DKS ($A\xi\eta\zeta$) vezan za telo;

i – prenosno kretanje tačke M – kretanje koje telo prenosi tački M, (kretanje koje je posledica kretanja tela), a koje je u celini određeno kretanjem tela.

Kretanje tela i kretanje tačke M po (na) telu, tj. relativno kretanje tačke M, su međusobno nezavisna kretanja, što znači da je broj stepeni slobode posmatranog mehaničkog sistema telo-tačka jednak zbiru broja stepeni slobode relativnog i broja stepeni slobode kretanja tela u odnosu na (nepok.) DKS $Oxyz$. Ovo ima za posledicu da se kinematske veličine relativnog kretanja (relativna brzina tačke $\vec{v}_r$ i relativno ubrzanje tačke $\vec{a}_r$) mogu odrediti nezavisno od kinematskih veličina prenosnog kretanja (prenosne brzine $\vec{v}_p$ i prenosnog ubrzanja tačke $\vec{a}_p$) u posmatranom trenutku t.

Relativna brzina $\vec{v}_r$ (brzina relativnog kretanja) i relativno ubrzanje $\vec{a}_r$ (ubrzanje relativnog kretanja) su brzina i ubrzanje tačke M u odnosu na telo, tj. u koordinatnom sistemu vezanom za telu ($A\xi\eta\zeta$). Linija koju tačka M opisuje tokom svog relativnog kretanja u koordinatnom sistemu vezanom za telu ($A\xi\eta\zeta$); tj. na telu, predstavlja trajektoriju relativnog kretanja.

Prenosna brzina $\vec{v}_p$ (brzina prenosnog kretanja) i prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ (ubrzanje prenosnog kretanja) predstavljaju brzinu i ubrzanje one tačke M' tela sa kojom se tačka M poklapa u trenutku t, tj. $\boxed{\vec{v}_p = \vec{v}_{M'}}$ i $\boxed{\vec{a}_p = \vec{a}_{M'}}$, $\boxed{M' = M}$. Ove veličine su u svakom trenutku t određene kinematikom kretanja tela (KS $A\xi\eta\zeta$). S obzirom na napred rečeno, za veličine $\vec{v}_p$ i $\vec{a}_p$ u posmatranom trenutku t se može reći, da one predstavljaju onu brzinu i ono ubrzanje koje bi tačka M u posmatranom trenutku t imala kada bi se u tom trenutku nalazila u stanju relativnog mirovanja na telu, (u odnosu na koordinatni sistem vezan za telo ($A\xi\eta\zeta$)), kada je: $\vec{v}_r(t)=0$ i $\vec{a}_r(t)=0$

Trajektoriju, odnosno, liniju putanje prenosnog kretanja tačke M se, s obzirom na prethodno, ne može odrediti, jer je, ~~prema prethodnom rečenom,~~ tačka M zbog svog relativnog kretanja po telu u svakom trenutku t u kontaktu sa nekom drugom tačkom M' tela.

Apsolutno kretanje tačke M kao rezultat kompozicije prenosnog i relativnog kretanja, a u odnosu na nepokretni referentni objekat, DKS Oxyz, odlikuje se apsolutnom brzinom $\vec{v}$ i apsolutnim ubrzanjem tačke $\vec{a}$.

Apsolutna brzina tačke $\vec{v}$, kao brzina tačke M u odnosu na nepokretni referentni objekat, u posmatranom trenutku t je:

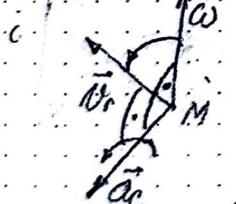
$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_p+\vec{v}_r}$$

Apsolutno ubrzanje tačke $\vec{a}$, kao ubrzanje tačke M u odnosu na nepokretni referentni objekat u posmatranom trenutku t je:

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_p+\vec{a}_c}$$

gde je:

$\boxed{\vec{a}_c=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r}$ – Koriolisovo ubrzanje koje iskazuje uticaj prenosnog na relativno i relativnog na prenosno kretanje. U izrazu za $\vec{a}_c$, $\vec{\omega}=\vec{\omega}_p$ je vektor trenutne ugaone brzine tela, tj. koordinatnog sistema vezanog za telo. Intezitet Koriolisovog ubrzanja $\vec{a}_c$ je: $|\vec{a}_c|=|\vec{\omega}||\vec{v}_r|\sin\angle(\vec{\omega},\vec{v}_r)$, dok je pravac i smer vektora $\vec{a}_c$ određen pravilom desnog zavrtnja ($\vec{a}_c\perp\vec{\omega}$, $\vec{a}_c\perp\vec{v}_r$, iz vrha vektora $\vec{a}_c$ smer obrtanja vektora $\vec{\omega}$ u ravni vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{v}_r$, a oko vektora $\vec{a}_c$, kojim se vektor $\vec{\omega}$ dovodi do poklapanja sa vektorom $\vec{v}_r$ najkraćim putem, vidi se u pozitivnom matematičkom smeru)



Ukoliko se telo kreće translatorno, to je:

$\vec{\omega}=0 \Rightarrow \vec{a}_c=0$ i $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_p$

U zadatku koji se ovde razmatra, kretanje tačke M može se razmatrati kao složeno kretanje koje sastoji od:

1.- relativnog kretanja tačke po kružnom žljebu na telu, ploči, tako da je trajektorija (linija putanje) relativnog kretanja kružnica sa centrom u temenu A ploče, a poluprečnika R, tj. srednja linija žljeba; relativno kretanje tačke može se odrediti zakonom relativnog puta $s_r=s_r(t)$, gde je $s_r=\overset{\frown}{OM}$ relativna, lučna koordinata koja se meri od referentne tačke $O=M_0$ na trajektoriji relativnog kretanja do položaja tačke M u trenutku t na toj trajektoriji (u žljebu).

2.- prenosnog kretanja tačke M koje je posledica rotacije ploče oko nepokretne ose $Oz = O\zeta$ koje je određeno zakonom obrtanja $\varphi = \varphi(t) = \frac{1}{2}\pi t^2$, gde je ugao φ ugao obrtanja tela (ugao kojim se u bilo kom trenutku t određuje položaj ploče u nepokretnoj ravni Oxy, tj. ugao između ose Ox i ose $O\xi$ vezane za ploču u tačkama O i A ploče: $\varphi = \measuredangle(Ox, O\xi) = \measuredangle(Ox, OA)$)

Položaj tačke M u nepokretnoj ravni Oxy u bilo kom trenutku t određen je funkcijama $s_r = s_r(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$. U trenutku t_1 kada tačka napušta žleb, tj. kada se nalazi u položaju $M_1 = B$, vrednost relativne lučne koordinate s_r je:

$s_{r_1} = s_r(t_1) = \frac{\pi R}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\pi R t_1^2 = \frac{\pi R}{2}$,

pa je trenutak t_1: $\boxed{t_1 = 1}$

U tom trenutku $t_1 = 1$ položaj ploče u ravni Oxy određen je uglom:

$\varphi_1 = \varphi(t_1) = \frac{\pi t_1^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{2}}$ $(\varphi_1 = \measuredangle(Ox, O\xi_1) = \measuredangle(Ox, OA_1))$

Vektor relativne brzine $\vec{v}_r$ i vektor relativnog ubrzanja $\vec{a}_r$ u proizvoljnom trenutku t biće određeni u prirodnom triedru vezanom za trajektoriju relativnog kretanja tačke, a u posmatranom položaju tačke. Ovaj triedar čine:

- ort tangente $\vec{T}_r$ u položaju M tačke (smer $\vec{T}_r$ je u skladu sa smerom porasta lučne koordinate s_r)
- ort glavne normale $\vec{N}_r$ u položaju M tačke ($\vec{N}_r \perp \vec{T}_r$ u oskulatornoj ravni, $\vec{N}_r$ ima smer ka centru krivine relativne trajektorije (centru A kružnice)
- ort binormale $\vec{B}_r = \vec{T}_r \perp \vec{N}_r$, ($\vec{B}_r$ upravan na ravan ploče, ravan relativnog kretanja)

Vektor relativne brzine $\vec{v}_r$ u ovom triedru je:

$\boxed{\vec{v}_r = v_r \vec{T}_r}$ gde je:

$\boxed{v_r = \dot{s}_r}$ – algebarska vrednost vektora $\vec{v}_r$, tj. njegova projekcija na ort tangente $\vec{T}_r$ u trenutku t.

Kako je:

$v_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi R t^2}{2}\right) \Rightarrow v_r = \pi R t > 0$, to je vektor $\vec{v}_r$ u smeru vektora $\vec{T}_r$

Vrednost relativne brzine u trenutku $t_1 = 1$, u položaju M_1, biće

$v_{r_1} = v_r(t_1) = \pi R t_1 \Rightarrow \boxed{v_{r_1} = \pi R}$

dok je vektor relativne brzine $\vec{v}_{r_1}$ u pravcu i smeru orta tangente $\vec{T}_{r_1}$ na trajektoriju relativnog kretanja u položaju $B = M_1$: $\boxed{\vec{v}_{r_1}} = v_{r_1}\vec{T}_{r_1} = \pi R \vec{j}$

Relativno ubrzanje $\vec{a}_r = \vec{a}_r(t)$ u prirodnom triedru vezanom za trajektoriju relativnog kretanja tačke u posmatranom položaju tačke je:

$\vec{a}_r = \vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN}$,

gde je:

$\vec{a}_{rT} = a_{rT}\vec{T}_r$ i $a_{rT} = \dot{v}_r$ – relativno tangentno ubrzanje

i $\vec{a}_{rN} = a_{rN}\vec{N}_r$ i $a_{rN} = \frac{v_r^2}{R_{k,r}}$ – relativno normalno ubrzanje.

Relativno tangentno ubrzanje a_{rT} posledica je promene algebarske vrednosti relativne brzine u vremenu, a vektor relativnog tangentnog ubrzanja $\vec{a}_{rT}$ je kolinearan je vektoru relativne brzine $\vec{v}_r$ u posmatranom trenutku vremena.

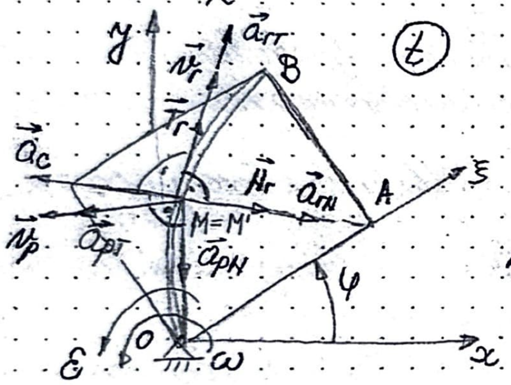
Relativno normalno ubrzanje a_{rN} posledica promene pravca vektora relativne brzine u vremenu. Veličina R_{kr} u izrazu za relativno normalno ubrzanje, $a_{rN}=\frac{v_r^2}{R_{kr}}$, predstavlja poluprečnik krivine trajektorije relativnog kretanja u posmatranom položaju tačke na njoj. Vektor $\vec{a}_{rN}$ ima pravac i smer orta glavne normale na trajektoriju relativnog kretanja u posmatranom položaju tačke na njoj.

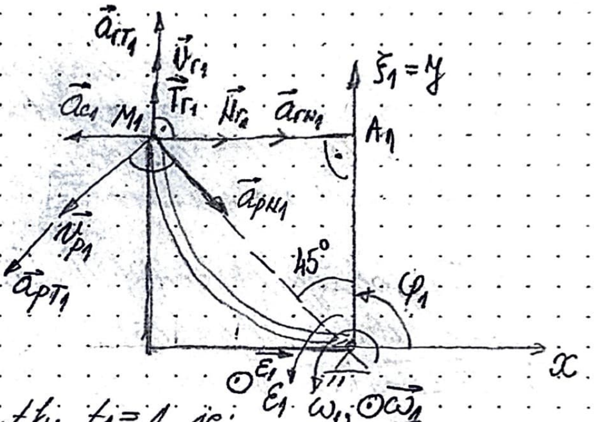
Relativno tangentno ubrzanje a_{rT} u trenucima t i t_1, u ovom zadatku, iznosi:

$a_{rT}=\dot{v}_r=\frac{d}{dt}(\pi R t) \Rightarrow \boxed{a_{rT}(t)=\pi R} \Rightarrow \boxed{a_{rT_1}=a_{rT}(t_1=1)=\pi R} > 0$ (Pošto je $a_{rT}(t)>0$, to su vektori $\vec{a}_{rT}=\vec{a}_{rT}$ i $\vec{v}_r=\vec{v}_r(t)$ istog smera.)

Normalno relativno ubrzanje a_{rN} u trenucima t i t_1, u ovom zadatku, a s obzirom da je $R_{kr}=R$, iznosi:

$a_{rN}=\frac{v_r^2}{R_{kr}}=\frac{(\pi R t)^2}{R} \Rightarrow \boxed{a_{rN}(t)=\pi^2 R t}$ i $a_{rN_1}=a_{rN}(t_1)=\frac{v_{r_1}^2}{R_{kr}} \Rightarrow \boxed{a_{rN_1}=\frac{(\pi R)^2}{R}=\pi^2 R}$





Na osnovu prethodnog u trenutku $t_1=1$ je:

$\vec{a}_{rT_1}=a_{rT_1}\vec{T}_{r_1} \Rightarrow \vec{a}_{rT_1}=\pi R\vec{j}$

i $\vec{a}_{rN_1}=a_{rN_1}\vec{N}_{r_1} \Rightarrow \vec{a}_{rN_1}=\pi^2 R\vec{i}$.

Kinematske karakteristike prenosnog kretanja tačke M posledica su činjenice da se ploča po kojoj kreće tačka M obrće oko nepokretne ose $Oz=O\zeta$ po zakonu: $\varphi=\frac{\pi t^2}{2}$.

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje ploče u trenucima t i t_1 su:

$\omega=\omega(t)=\dot{\varphi} \Rightarrow \omega=\pi t$ i $\boxed{\omega_1=\omega(t_1=1)=\pi}$

i $\varepsilon=\varepsilon(t)=\dot{\omega} \Rightarrow \varepsilon=\pi$ i $\boxed{\varepsilon_1=\varepsilon(t_1=1)=\pi}$

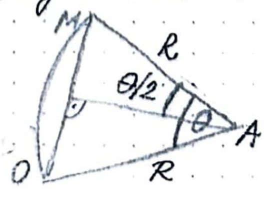
Pošto je: $\omega(t)>0$ i $\varepsilon(t)>0$, to su ugaona brzina $\omega=\omega(t)$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon=\varepsilon(t)$ u istom smeru, tj. vektori $\vec{\omega}=\vec{\omega}(t)$ i $\vec{\varepsilon}=\vec{\varepsilon}(t)$ su kolinearni vektori istog smera.

Prenosna brzina tačke M u bilo kom trenutku t jednaka je, kao što je rečeno, brzini tačke ploče M' sa kojom se tačka M u posmatranim trenucima poklapa ($M=M'$):

$\vec{v}_p=\vec{\omega}\times\vec{OM} \Rightarrow v_p=\omega\overline{OM}$ i $\vec{v}_p \perp OM$ u ravni Oxy, pri čemu je smer vektora $\vec{v}_p$ određen smerom ugaone brzine ω (pravilo desnog zavrtnja)

gde je: $\overline{OM}=2R\sin\frac{\theta}{2}$ i $\theta=s_r/R=\pi t^2/2$.

$\boxed{\overline{OM}=f(s_r)}$, tj.



U trenutku $t_1=1$ prenosna brzina tačke M, $\vec{v}_{p1}$, biće:

$\vec{v}_{p1}=\vec{\omega}_1 \times \overline{OM}_1 \Rightarrow v_{p1}=\omega_1 \cdot \overline{OM}_1$ i $\vec{v}_{p1} \perp OM_1$ u ravni slike i smer vektora $\vec{v}_{p1}$ određen pravilom desnog zavrtnja,

gde je $\boxed{\overline{OM}_1=R\sqrt{2}}$ $\left(\overline{OM}=2R\sin\theta_1/2 \text{ i } \theta_1=\frac{\pi}{2}\right)$, tako da je:

$\boxed{v_{p1}}=\omega_1 \overline{OM}_1=\boxed{\pi R\sqrt{2}}$ i $\vec{v}_{p1}=-v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{p1}}=-\pi R\vec{i}-\pi R\vec{j}$

Za obrtno prenosno kretanje vektor prenosnog ubrzanja tačke M, kao ubrzanje koincidentne tačke M' ploče, u trenutku t je:

$\vec{a}_p=\vec{a}_{pN}+\vec{a}_{pT}$,

gde je:

$\vec{a}_{pT}=\vec{\varepsilon}\times\overline{OM} \Rightarrow a_{pT}=|\varepsilon|\overline{OM}$ i $\vec{a}_{pT}\perp OM$ u ravni slike čiji je smer određen pravilom desnog zavrtnja – prenosno tangentno ubrzanje

i $\vec{a}_{pN}=\vec{\omega}\times\vec{v}_p=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overline{OM}) \Rightarrow a_{pN}=\omega^2\overline{OM}$ i vektor $\vec{a}_{pN}$ kolinearan sa vektorom $\overrightarrow{MO}$ – prenosno normalno ubrzanje

U trenutku $t_1=1$ ove komponente prenosnog ubrzanja su:

$\boxed{a_{pT1}}=\varepsilon_1\overline{OM}_1=\boxed{\pi R\sqrt{2}}$ i $\vec{a}_{pT1}=-a_{pT1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-a_{pT1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{pT1}=-\pi R\vec{i}-\pi R\vec{j}$

i $\boxed{a_{pN1}}=\omega_1^2\overline{OM}_1=\boxed{\pi^2 R\sqrt{2}}$ i $\vec{a}_{pN1}=+a_{pN1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-a_{pN1}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_{pN1}=\pi^2R\vec{i}-\pi^2R\vec{j}$

Koriolovo ubrzanje, $\vec{a}_c=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$, u trenutku t_1 biće određeno izrazom:

$\vec{a}_{c1}=2\vec{\omega}_1\times\vec{v}_{r1}$.

Pošto su vektori $\vec{\omega}_1$ i $\vec{v}_{r1}$ međusobno upravni vektori, intezitet Koriolisovog ubrzanja u trenutku t_1 biće:

$|\vec{a}_{c1}|=2|\vec{\omega}_1||\vec{v}_{r1}|\sin 90° \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_{c1}|=2\pi^2R}$, pri čemu je smer tog vektora određen pravilom desnog zavrtnja, tako da je:

∴ Vektor $\vec{a}_{c1}$ će biti upravan na vektor $\vec{v}_{r1}$ u ravni slici,

$\vec{a}_{c1}=-2\pi^2R\,\vec{i}$.

Apsolutna brzina tačke, $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_p$, u trenutku t_1 je:

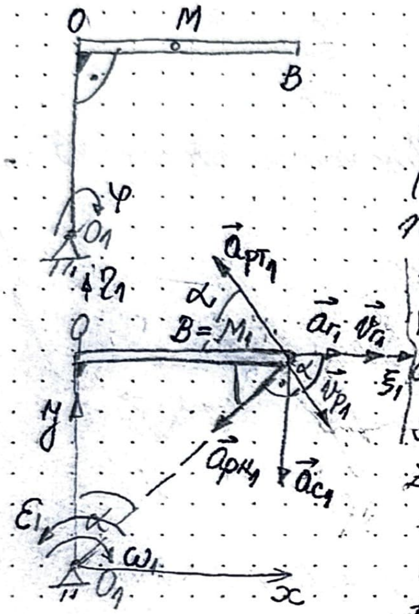
$$\vec{v}_1=\vec{v}_{p1}+\vec{v}_{r1} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\boxed{v_{1x}}=-v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\pi R\\ \boxed{v_{1y}}=v_{r1}-v_{p1}\frac{\sqrt{2}}{2}=0\end{matrix}\right| \Rightarrow |\vec{v}_1|=\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2} \Rightarrow |\vec{v}_1|=\pi R$$

Apsolutno ubrzanje tačke, $\vec{a}=\vec{a}_p+\vec{a}_r+\vec{a}_c$, u trenutku t_1 je:

$$\vec{a}_1=\vec{a}_{p1}+\vec{a}_{r1}+\vec{a}_{c1}=\vec{a}_{pT1}+\vec{a}_{pN1}+\vec{a}_{rT1}+\vec{a}_{rN1}+\vec{a}_c \Bigg| \Rightarrow \left.\begin{matrix}a_{1x}=a_{pN1}\frac{\sqrt{2}}{2}-a_{pT1}\frac{\sqrt{2}}{2}-a_{c1}+a_{rN1}\\ a_{1y}=-a_{pN1}\frac{\sqrt{2}}{2}-a_{pT1}\frac{\sqrt{2}}{2}+a_{rT1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$a_{1x}=-\pi R$ i $a_{1y}=-\pi^2 R$

(2.) Cev OB dužine $\overline{OB}=4$ kruto je vezana u tački O pod pravim uglom za štap O_1O dužine $\overline{O_1O}=3$. Štap O_1O obrće oko ose koja prolazi kroz tačku O_1 i upravna na ravan slike, po zakonu: $\varphi = 2\ln(1+2t)$. U cevi OB, iz tačke O ka kraju B, istovremeno se kreće tačka M po zakonu: $\overline{OM}=s_r=3t^2+13/4$.
Odrediti intezitet apsolutne brzine i apsolutnog ubrzanja tačke M u trenutku kada ona stigne do kraja cevi (u tački B).



Složeno kretanje tačke M se u ovom zadatku može raščlaniti na relativno pravolinijsko kretanje po pravolinijskoj cevi OB, pri čemu je poznat zakon relativnog kretanja, i njeno prenosno kretanje usled rotacije tela (ugaonika O_1OB) oko nepokretne ose $O_1z = O_1\zeta$ upravne na ravan slike, a po poznatom zakon $\varphi = \varphi(t)$.

U trenutku t_1 tačka se nalazi u položaju $M_1 = B$, pa je vrednost relativne koordinate s_r tačke M u tom trenutku:

$$\overline{OB} = s_{r_1} = s_r(t_1) \Rightarrow 4 = 3t_1^2 + \frac{13}{4} \Rightarrow \boxed{t_1 = 1/2}$$

S obzirom da u zadatku nisu naznačene ose DKS vezanog za ugaonik, kao ni ose nepokretnog koordinatnog sistema u ravni slike, a u odnosu na koje se meri ugao rotacije φ tela, to se za položaj tela u ravni slike u trenutku t_1 može usvojiti bilo koji položaj koji dozvoljava veza (nepokretni zglob u tački O_1).

Ovakav stav je opravdan u slučaju kada se tačka kreće po telu koje rotira oko nepokretne ose, zato što **u posmatranom trenutku t geometrijski odnosi tačke M na telu prema tačkama i pravama tog tela u prostoru, ne zavise od položaja tog tela u prostoru.** To znači da uglovi između vektorskih kinematskih veličina relativnog i prenosnog kretanja (na telu) tj. ugao između $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$, odnosno, odgovarajućih komponenti relativnog i prenosnog ubrzanja, kao **i inteziteti tih vektorskih veličina, u posmatranom trenutku t, ne zavise od trenutnog položaja tela koje rotira oko nepokretne ose u prostoru.**
Zbog toga je analizu brzina i ubrzanja relativnog i prenosnog kretanja tačke M, kao i apsolutne brzine i ubrzanja tačke, u trenutku t_1 moguće sprovesti u nacrtanom položaju ugaonika O_1OB (tj. tela). Ose na koje će biti projektovani vektori kinematskih veličina tačke u trenutku t_1 biće osa $O\xi_1$ vezana za cev i osa $O\eta_1$ upravna na cev, koje su, u smislu prethodnih razmatranja, paralelne osama nepokretnog DKS Oxy ($\vec{\lambda}_1 = \vec{i}$, $\vec{\mu}_1 = \vec{j}$) (osa O_1y ima pravac OO_1, ose $O\eta_1$

Relativna brzina i relativno ubrzanje.

$v_r = \dot{s}_r = 6t \Rightarrow v_{r_1} = v_r(t_1) = 3$

i $a_r = a_{rT} = \dot{v}_r \Rightarrow a_{r_1} = a_r(t_1) = 6$

Prenosna brzina i prenosno ubrzanje

$v_p = \omega \cdot h_z = \omega \cdot \overline{O_1M}$, gde je $\omega = \dot{\varphi} = \frac{4}{1+2t}$ i $\overline{O_1M} = \sqrt{\overline{OO_1}^2 + \overline{OM}^2}$

za $t_1 = 1/2 \Rightarrow \boxed{\omega_1} = \omega(t_1) = 2$, $\overline{O_1M_1} = \overline{O_1B} = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \Rightarrow \boxed{v_{p_1}} = \omega_1 \cdot \overline{O_1M_1} = 10$ i

$\cos\alpha = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_1B}} = \frac{3}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{O_1B}} = \frac{4}{5}$

i

$\vec{a}_p = \vec{a}_{pT} + \vec{a}_{pN}$, gde je $a_{pT} = \varepsilon \cdot \overline{O_1M}$ i $a_{pN} = \omega^2 \cdot \overline{O_1M}$, $\boxed{\varepsilon = \dot{\omega}} = -\frac{8}{(1+2t)^2}$

za $t_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1} = \varepsilon(t_1 = \frac{1}{2}) = -2$

$\boxed{|a_{pT_1}|} = |\varepsilon_1| \overline{O_1M_1} = 2 \cdot 5 = \boxed{10}$; $\boxed{a_{pN_1}} = \omega_1^2 \overline{O_1M_1} = 20$

$\rightarrow$ vektor $\vec{a}_{pT_1}$ je suprotnog smera od vektora v_{p_1} $(\omega_1 > 0, \varepsilon_1 < 0)$

Koriolisovo ubrzanje:

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$; $\vec{\omega} \perp \vec{v}_r \Rightarrow |\vec{a}_c| = 2|\vec{\omega}||\vec{v}_r| =$

i

$t_1 = 1/2 \Rightarrow |\vec{a}_{c_1}| = 2|\vec{\omega}_1||\vec{v}_{r_1}| = 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_{c_1}|} = 12$

Apsolutna brzina

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p$

za $t_1 = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_{r_1} + \vec{v}_{p_1}$ $\Big/ \Rightarrow$ $\xi_1(x)$: $\boxed{v_{1x}} = v_{r_1} + v_{p_1}\cos\alpha = 9$

$\eta_1(y)$: $\boxed{v_{1y}} = -v_{p_1}\sin\alpha = -8$

$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{145}$

Apsolutno ubrzanje

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c$

$t_1 = 1/2 \Rightarrow \vec{a}_1 = \vec{a}_{r_1} + \vec{a}_{p_1} + \vec{a}_{c_1}$ $\Big/ \Rightarrow$ $\xi_1(x)$: $a_{1x} = a_{r_1} - a_{pN_1}\sin\alpha - a_{pT_1}\cos\alpha$

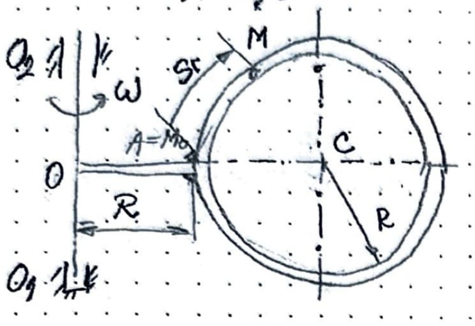
$\boxed{a_{1x}} = -16$

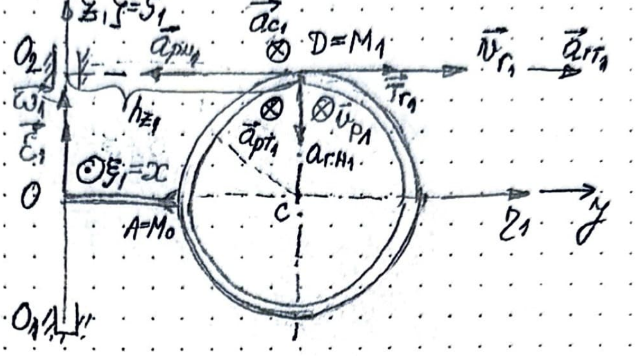
$\eta_1(y)$: $a_{1y} = -a_{pN_1}\cos\alpha + a_{pT_1}\sin\alpha - a_{c_1}$

$\boxed{a_{1y}} = -16$

$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} \Rightarrow a_1 = 16\sqrt{2}$

(3). Kružna cev poluprečnika R kruto je vezana za vertikalnu osovinu pomoću poluge $\overline{OA}=R$ i može da se obrće oko te ose ugaonom brzinom $\omega=\pi t$. Istovremeno sa obrtanjem cevi kreće se u cevi tačka M polazeći iz položaja A u smeru naznačenom na slici, pri čemu se njena relativna brzina menja po zakonu $v_r = R\frac{\pi^2}{4}\cos(\pi t/4)$. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje u trenutku $t_1=2/3$





Brzina relativnog kružnog kretanja je:

$v_r = R\frac{\pi^2}{4}\cos(\pi t/4)$, gde je v_r projekcija vektora $\vec{v}_r$ na osu tangente na trajektoriju relativnog kretanje, tako da je zakon puta relativnog kretanja $\overset{\frown}{AM}=S_r(t)$:

$v_r = \dot{s}_r \Rightarrow R\frac{\pi^2}{4}\cos(\pi t/4) = \frac{ds_r}{dt} \Rightarrow \int_{s_{r0}=0}^{s_r} ds_r = R\frac{\pi^2}{4}\int_{t_0=0}^{t}\cos\frac{\pi t}{4}dt \Rightarrow$

$\boxed{S_r} = \overset{\frown}{AM} = R\pi \cdot \sin\frac{\pi t}{4}$,

gde je $\overset{\frown}{AM}$ lučna koordinata duž relativne trajektorije.

Nakon $t_1=\frac{2}{3}$ tačka M će se naći u položaju:

$S_{r1} = \overset{\frown}{AM_1} = S_r(t_1=\frac{2}{3}) \Rightarrow S_{r1} = R\pi \sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{S_{r1} = R\frac{\pi}{2}}$,

tj tačka M će se naći na vrhu kružne trajektorije, tj. u položaju $D=M_1$, a njena relativna brzina i njeno relativno ubrzanje iznosiće:

$v_{r1} = v_r(t_1=\frac{2}{3}) \Rightarrow v_{r1} = R\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{v_{r1} = R\pi^2\frac{\sqrt{3}}{8}}$

i $\vec{a}_{r1} = \vec{a}_{rT1} + \vec{a}_{rN1}$

$a_{rT} = \dot{v}_r = -R\frac{\pi^3}{16}\sin\frac{\pi t}{4} \Rightarrow \boxed{a_{rT1} = -\frac{R\pi^3}{32}}$ ($a_{rT1}<0$, $v_{r1}>0$, vektori $\vec{v}_{r1}$ i $\vec{a}_{rT1}$ su suprotnog smera)

$a_{rN} = \frac{v_r^2}{R} \Rightarrow a_{rN1} = \frac{v_{r1}^2}{R} \Rightarrow \boxed{a_{rN1} = \frac{3R\pi^4}{64}}$

Prenosno kretanje tačke je određeno rotacijom prstena oko nepokretne ose tela $Oz=O\zeta$, koja se nalazi u ravni slike. Ugao rotacije tela, ugaona brzina i ugaono ubrzanje tela u trenutku $t_1=2/3$ su:

$\omega=\dot{\varphi} \Rightarrow d\varphi=\omega dt \Rightarrow \int d\varphi = \int_0^t \pi t\,dt \Rightarrow \varphi=\frac{\pi t^2}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi_1} = \varphi(t_1) = \frac{2}{9}\pi$

$\varepsilon=\dot{\omega} \Rightarrow \varepsilon=\pi \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1) = \pi}$

i $\boxed{\omega_1 = \omega(t_1) = \frac{2}{3}\pi}$

S obzirom na činjenice iznete u zadatku 2, može se usvojiti da se ravan koja sadrži kružnu ploču i osu rotacije, tj ravan $O\eta\zeta$ (osa $O\eta$ je na pravoj OC) u trenutku $t_1=\frac{2}{3}$ poklopa sa ravni slike Oyz: $Oy=O\eta_1$ i $Oz=O\zeta=O\zeta_1$. Osa $O\xi_1=Ox$ upravna je na ravan slike

Prenosna brzina i prenosno ubrzanje tačke u položaju $M_1 = D$ su:

$v_p = \omega h_z \Rightarrow v_{p1} = \omega_1 \cdot h_{z1}$,
gde je h_z - normalno rastojanje tačke do ose rotacije i $h_{z1} = h_z(t_1) = 2R$ $\Big\} \boxed{v_{p1}} = \frac{4}{3} R\pi$

i $\vec{a}_{p1} = \vec{a}_{pN1} + \vec{a}_{pT1}$, gde je:

$a_{pN} = \omega^2 h_z$ i $a_{pN1} = \omega_1^2 h_{z1} \Rightarrow \boxed{a_{pN1}} = \frac{8}{9} R\pi^2$

$a_{pT} = \varepsilon h_z$ i $a_{pT1} = \varepsilon_1 h_{z1} \Rightarrow \boxed{a_{pT1}} = 2R\pi$

Apsolutna brzina i apsolutno ubrzanje

$\vec{v}_{r1} \perp \vec{v}_{p1} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_{r1} + \vec{v}_{p1} = v_{r1}\vec{j} - v_{p1}\vec{i}$; $v_1^2 = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{p1}^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\left(\frac{R\pi^2\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}R\pi\right)^2}$

i $\vec{a}_1 = \vec{a}_{r1} + \vec{a}_{p1} + \vec{a}_{c1} = \vec{a}_{r1T} + \vec{a}_{r1N} + \vec{a}_{pT1} + \vec{a}_{pN1} + \vec{a}_{c1}$

$\vec{a}_{c1} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{r1} \Rightarrow \boxed{a_{c1}} = 2\omega_1 v_{r1} = \frac{\sqrt{3}}{6} R\pi^3$

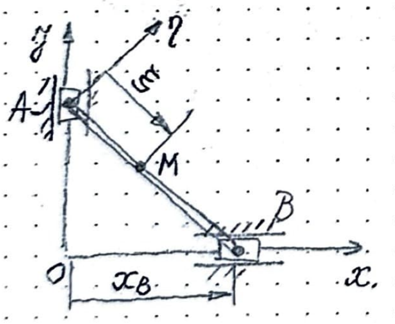
$\Rightarrow$ $a_{1x} = -a_{pT1} - a_{c1} = -2R\pi - \frac{\sqrt{3}}{6} R\pi^3$

$a_{1y} = a_{rT1} - a_{pN1} = -\frac{R\pi^3}{32} - \frac{8}{9} R\pi^2$

$a_{1z} = -a_{rN1} = -\frac{3R\pi^4}{64}$

$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2}$

④ Cev AB ($\overline{AB} = R\sqrt{2}$) kreće se u ravni Oxy. Krajevi cevi vezani su za klizače A i B koji se kreću duž koordinatnih osa, pri čemu je koordinata tačke B određena sa $x_B = R\sqrt{2}\sin(\pi t/4)$. Duž cevi, polazeći iz tačke A prema tački B, kreće se tačka M. Intezitet relativne brzine tačke M je $v_r = 2\sqrt{2}Rt$. Odrediti intezitet apsolutne brzine i ubrzanja tačke M kada ona dođe do klizača B.



Relativno kretanje tačke M je pravolinijsko kretanje tačke u cevi AB.

Prenosno kretanje tačke M je određeno ravnim kretanjem cevi AB u ravni Oxy.

Za cev je vezan DKS $A\xi\eta\zeta$, pri čemu je osa $A\xi$ duž ose cevi (prolazi kroz tačke A i B cevi), osa $A\eta$ upravna je na cev u ravni njenog kretanja, a osa $A\zeta$ je upravna je na ravan kretanja cevi Oxy.

Ako za pol translacije cevi izaberemo tačku B cevi, onda je njegovo kretanje, zbog zglobne veze u toj tački cevi i klizača (klizač se kreće u pravolinijskim vođicama duž ose Ox), opisano jednačinama:

$x_B = x_B(t)$ i $y_B = 0$.

Ugao rotacije štapa oko ose $B\zeta$, odnosno $A\zeta$ ($A\zeta \parallel B\zeta$; ugao rotacije isti za sve translatorno pokretne, međusobno paralelne ose, tj., ne zavisi od toga koja je tačka izabrana za pol translacije), kao ugao između početnog položaja ose $A\xi$ i njenog trenutnog položaja može se; s obzirom da je u tački A štap zglobno vezan drugi klizač koji se kreće u vođicama duž ose Oy čije su jednačine kretanja: $x_A=0$; $y_A=y_A(t)$, izraziti preko zakona kretanja tačke B; $x_B=x_B(t)$. Naime, ako je:

$$\boxed{x_B} = x_B(t) = R\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}t$$

u početnom trenutku $t_0=0$, tačka B se nalazila u koordinatnom početku O, tj. $O=B_0$, pa se osa cevi poklapala sa osom $A_0\xi_0$ koja je imala isti pravac kao osa Oy, ali suprotan smer. Zakon promene ugla $\varphi=\angle(A_0\xi_0, A\xi)$, s obzirom na geometrijske odnose, biće određen relacijom:

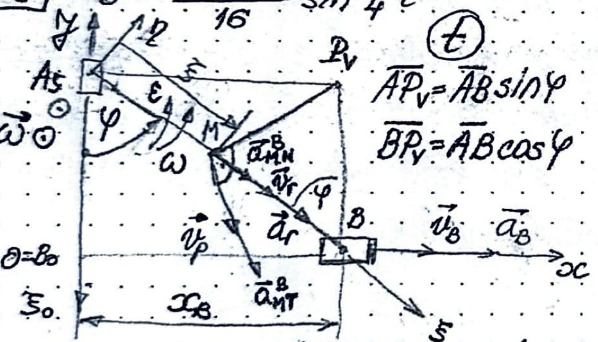
$$\sin\varphi(t)=\frac{x_B(t)}{R\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\varphi(t)=\sin\frac{\pi}{4}t \Rightarrow \boxed{\varphi}=\varphi(t)=\frac{\pi}{4}t$$

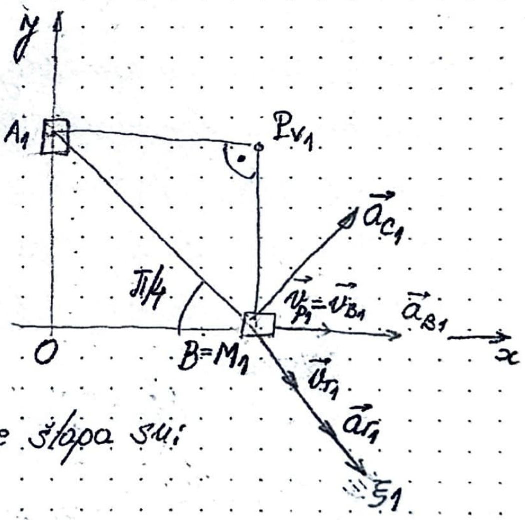
Vodeći računa o ovoj relaciji, kao i o činjenici da je $y_B=0$, sledi da je broj stepeni slobode cevi $n=3-2=1$, pa je ravno kretanje cevi AB određeno jedinim zakonom kretanja njene tačke B u pravcu ose Ox: $x_B=x_B(t)$.

Iz zakona kretanja tačke B dobijaju se projekcije v_B i a_B vektora brzine $\vec{v}_B$ i vektora ubrzanja $\vec{a}_B$ na osu Ox:

$$\boxed{v_B} = \dot{x}_B = \frac{\pi R\sqrt{2}}{4}\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$\boxed{a_B} = \ddot{x}_B = \frac{-\pi^2 R\sqrt{2}}{16}\sin\frac{\pi}{4}t$$





Ugaona brzina $\omega=\dot{\varphi}$ i ugaono ubrzanje štapa su:

$$\boxed{\omega}=\dot{\varphi}=\frac{\pi}{4}=const \quad i \quad \boxed{\varepsilon}=\dot{\omega}=0$$

Relativno pravolinijsko kretanje tačke M duž cevi biće poznato ako je poznat zakon promene relativne koordinate tačke M na cevi: $\xi=\xi(t)$. U početnom trenutku $t_0=0$ vrednost ove koordinate je $\xi_0=\xi(0)=0$ $(A_0=M_0)$. Projekcija v_r vektora relativne brzine tačke, $\vec{v}_r$, na osu $A\xi$ je:

$$v_r=\dot{\xi} \Rightarrow 2\sqrt{2}Rt=d\xi/dt \Rightarrow \int_0^{\xi} d\xi = 2\sqrt{2}R\int_0^t t\,dt \Rightarrow \boxed{\xi=\xi(t)} = \sqrt{2}Rt^2$$

Projekcija a_r vektora relativnog ubrzanja tačke, $\vec{a}_r$, na osu $A\xi$ je:

$$a_r=\dot{v}_r=\ddot{\xi} \Rightarrow \boxed{a_r}=2\sqrt{2}R=const$$

U trenutku t_1 pređeni put tačke je: $\overline{A_1M_1}=\xi_1=\overline{AB}$, pa je:

$$\xi_1=\xi(t_1)=R\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}Rt_1^2=R\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{t_1}=1.$$

Relativna brzina i relativno ubrzanje tačke u $t_1=1$ su:

$$\boxed{v_{r_1}}=v_r(t_1)=2\sqrt{2}R \quad i \quad \boxed{a_{r_1}}=a_r(t_1)=2\sqrt{2}R$$

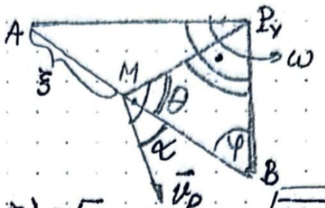
Prenosna brzina tačke M kao brzina koicidentne tačke cevi u trenutku t je:

$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \overrightarrow{P_vM} \Rightarrow v_p = \omega \overline{MP_v}, \quad \vec{v}_p \perp MP_v,$

gde je P_v trenutni pol brzina cevi AB u posmatranom trenutku t, a nalazi se u presecku normala na pravce brzina klizača A i B. Kako je:

$\overline{BP_v} = \overline{AB} \cos\varphi$

$\overline{MB} = \overline{AB} - \xi$



$\Downarrow$

$\overline{MP_v}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP_v}^2 - 2\overline{MB}\cdot\overline{BP_v}\cos\varphi$

$\overline{MP_v}^2 = (R\sqrt{2} - \xi)^2 + 2R^2\cos^2\varphi - 2(R\sqrt{2} - \xi)R\sqrt{2}\cos^2\varphi \Rightarrow \boxed{\overline{MP_v} = f(\xi, \varphi)}$

Rastojanje tačke M od trenutnog pola brzina P_v zavisi od položaja tačke M u cevi (njene relativne koordinate ξ), ali i od položaja cevi u ravni kretanja, ugla obrtanja φ cevi. To znači da i intezitet prenosne brzine tačke, $v_p = \omega \overline{MP_v}$, predstavlja funkcije napred navedenih koordinata sistema, tj.: $v_p = v_p(\varphi, \xi)$. Ugao između ose $A\xi$ i $\vec{v}_p$ je prema slici:

$\alpha = \measuredangle(A\xi, \vec{v}_p) = \frac{\pi}{2} - \theta$, gde je: $\frac{\overline{P_vB}}{\sin\theta} = \frac{\overline{MP_v}}{\sin\varphi} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\overline{P_vB}}{\overline{P_vM}}\sin\varphi$, pa su i $\theta = \theta(\xi, \varphi)$ i $\alpha = \measuredangle(A\xi, \vec{v}_p)$ funkcije ne samo relativne koordinate ξ, već je i ugla obrtanja cevi φ. Ove činjenice imaju za posledicu da se **pri određivanju kinematskih karakteristika prenosnog kretanja** (tačke M), **pa samim tim i kinematskih veličina apsolutnog kretanja u nekom trenutku t moraju se i tačka i telo postaviti u položaj koji odgovara tom trenutku, a u odnosu na nepokretni referentni objekat.**

U trenutku $t_1 = 1$ položaj cevi u DKS Oxy određen je koordinatom $x_{B_1} = x_B(t_1 = 1) = R$, što znači da je ugao obrtanja $\boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{4}}$. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje cevi u tom trenutku su:

$\boxed{\omega_1} = \omega = \frac{\pi}{4}$ i $\boxed{\varepsilon_1} = \varepsilon = 0,$

a brzina i ubrzanje tačke B cevi u $t_1 = 1$ su:

$\boxed{v_{B_1}} = \frac{R\pi}{4}$ i $a_{B_1} = -\frac{R\pi^2}{16}$ ($a_{B_1} < 0, v_{B_1} > 0$, vektori $\vec{a}_{B_1}$ i $\vec{v}_{B_1}$ su suprotnog smera).

Kako je u $t_1 = 1$, $B = M_1$, to je prenosna brzina tačke u tom trenutku, $\vec{v}_{p_1}$, jednaka brzini tačke B: $\boxed{\vec{v}_{p_1} = \vec{v}_{B_1}} \Rightarrow v_{p_1} = \frac{R\pi}{4}$

Prenosno ubrzanje tačke M kao ubrzanje koicidentne tačke cevi koja vrši ravno kretanje u trenutku t iznosi:

$\vec{a}_p = \vec{a}_B + \vec{a}_{MN}^B + \vec{a}_{MT}^B,$

gde je:

$a_{MN}^B = \omega^2 \overline{MB}$ i $a_{MT}^B = \varepsilon \overline{MB}$, $\overline{MB} = \overline{AB} - \xi = R\sqrt{2} - \xi$

U trenutku $t_1 = 1$ prenosno ubrzanje tačke, $\vec{a}_{p_1}$, jednako je ubrzanju tačke B cevi u tom trenutku:

$\boxed{\vec{a}_{p_1} = \vec{a}_B}$, jer je: $\overline{M_1B_1} = 0 \Rightarrow a_{M_1N}^{B_1} = 0$ i $a_{M_1T}^{B_1} = 0$

Apsolutna brzina $\vec{v}_1$ tačke M u trenutku $t_1=1$ je:

$$\vec{v}_1=\vec{v}_{r_1}+\vec{v}_{p_1}=\vec{v}_{r_1}+\vec{v}_{B_1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\boxed{v_{1x}}=v_{r_1}\frac{\sqrt{2}}{2}+v_{B_1}=2R+\frac{R\pi}{4}\\ \boxed{v_{1y}}=-v_{r_1}\frac{\sqrt{2}}{2}=-2R\end{array}\right\} v_1=\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}$$

Apsolutno ubrzanje $\vec{a}_1$ tačke M u trenutku $t_1=1$ je:

$$\vec{a}_1=\vec{a}_{p_1}+\vec{a}_{r_1}+\vec{a}_{c_1}=\vec{a}_{B_1}+\cancelto{0}{\vec{a}^{B_1}_{M_1N}}+\cancelto{0}{\vec{a}^{B_1}_{M_1T}}+\vec{a}_{r_1}+\vec{a}_{c_1},$$

tj.:

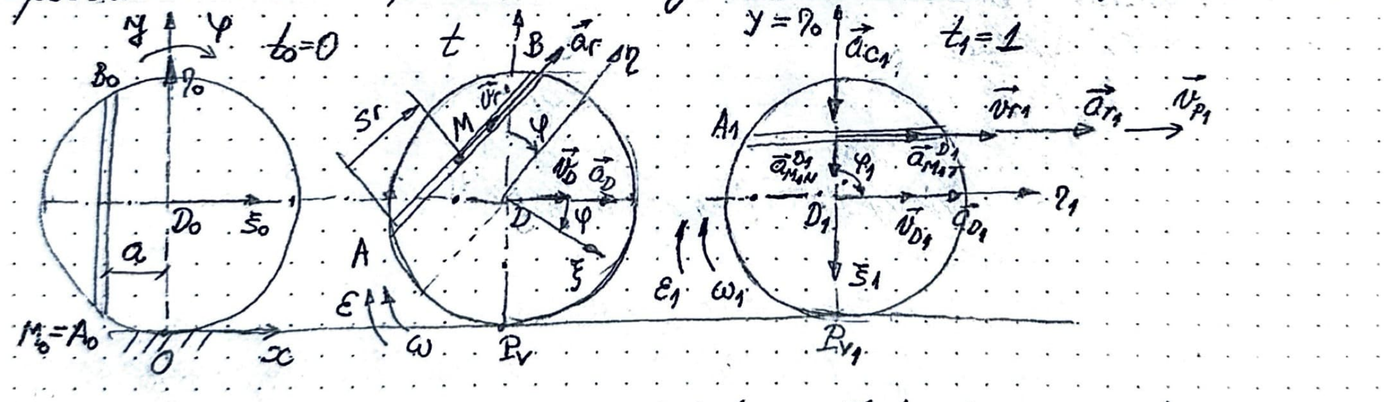
$$\vec{a}_1=\vec{a}_{B_1}+\vec{a}_{r_1}+\vec{a}_{c_1},$$

gde je: $\vec{a}_{c_1}=2\vec{\omega}_1\times\vec{v}_{r_1} \Rightarrow a_{c_1}=2\cdot\omega_1 v_{r_1}\sin 90^\circ \Rightarrow \boxed{a_{c_1}}=R\pi\sqrt{2}$,

pa je:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{a_{1x}}=a_{B_1}+a_{r_1}\cos\frac{\pi}{4}+a_{c_1}\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{R\pi^2}{16}+2R+R\pi\\ \boxed{a_{1y}}=-a_{r_1}\sin\frac{\pi}{4}+a_{c_1}\cos\frac{\pi}{4}=-2R+R\pi\end{array}\right\} a_1=\sqrt{a_{1x}^2+a_{1y}^2}$$

5.) Disk poluprečnika $R=5$ kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj podlozi. Položaj diska određen je uglom rotacije diska $\varphi=\pi\frac{t^2}{2}$. Istovremeno po žljebu AB diska, kreće se tačka M iz položaja A ka B po zakonu $s_r=4t^2$. U početnom trenutku žljeb je upravan na podlogu. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1=1$. Dato $a=3$.



Relativno kretanje tačke M je pravolinijsko po žljebu AB sa poznatim zakonom relativnog puta, $s_r=s_r(t)$.

Prenosno kretanje tačke M određeno je kotrljanjem diska bez klizanja po nepokretnoj ravnoj podlozi, dakle, ravnim kretanjem diska koje ima jedan stepen slobode ($n=1$) i koje je zadato zakonom rotacije, $\varphi=\varphi(t)$. Koordinatni sistem vezan za disk je $D\xi\eta\zeta$, čija se osa $D\eta$ u početnom trenutku $t_0=0$ poklapa sa osom $D_0\eta_0$, odnosno, sa pravcem ose Oy nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$, koje su paralelne osi žljeba (A_0B_0) u tom trenutku. Osa $D\xi$ upravna je na osu $D\eta$ u ravni kretanja mehaničkog sistema, a osa $D\zeta$ je upravna na tu ravan (Oxy). U trenutku t, usled kretanja diska centar diska D dospeće u položaj D (koordinate tog položaj u odnosu na nepokretan DKS su: $x_D = \varphi \overline{DP_v} = \varphi R$ i $y_D = R$), a ose $D\eta$ i $D\xi$ vezane za disk će se zaokrenuti za ugao rotacije $\varphi = \varphi(t)$ oko ose $D\zeta$ u odnosu na svoje početne položaje $D\eta_0$, odnosno, $D_0\xi_0$. Osa žljeba u tom trenutku ostaje paralelna osi $D\eta$ ($AB \parallel D\eta$). Ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje diska su:

$\omega = \dot\varphi = \pi t$ i $\varepsilon = \dot\omega = \pi = const$ (ω i ε istog znaka, tj. istog smera),

dok su brzina i ubrzanje centra D diska:

$\vec{v}_D = \vec\omega \times \overrightarrow{P_vD}$, $v_D = \omega R = \pi t R$ ($\vec v_D \perp P_vD$)

i $\vec a_D = \vec\varepsilon \times \overrightarrow{P_vD}$, $a_D = \varepsilon R = \pi R = const$ ($\vec a_D \perp P_vD$)

Položaj tačke M na žljebu u posmatranom trenutku određen je pravolinijskom koordinatom $s_r = 4t^2$ koja se meri od tačke A žljeba u smeru relativnog kretanja tačke po žljebu. Relativna brzina v_r i relativno ubrzanje tačke M u trenutku t su:

$v_r = \dot s_r = 8t$ i $a_r = \dot v_r = 8 = const.$

U trenutku $t_1 = 1$, ugao zaokretanja diska, tj. njegove ose $D\eta$ oko ose $D\zeta$, a u odnosu na njen početni položaj $D_0\eta_0$ iznosiće:

$\varphi_1 = \varphi(t_1 = 1) = \frac{\pi}{2}$, pa će se poklopi sa pravcem i smerom ose $D_1 D_1$ ($x_{D_1} = \frac{\pi}{2} R$)

U tom trenutku žljeb zauzima položaj koji je paralelan osi $D_1\eta_1$: $A_1B_1 \parallel D_1\eta_1$.

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska u $t_1 = 1$ su:

$\boxed{\omega_1} = \omega(t_1) = \pi$ i $\boxed{\varepsilon_1} = \varepsilon = \pi$,

a brzina i ubrzanje centra diska iznose:

$\boxed{v_{D_1}} = \omega_1 \overline{D_1P_{v_1}} = \boxed{5\pi}$ i $\boxed{a_{D_1}} = \varepsilon_1 \overline{D_1P_{v_1}} = \boxed{5\pi}$

Položaj tačke M na žljebu u posmatranom je: $\overline{A_1M_1} = s_{r_1} = s_r(t_1) \Rightarrow \boxed{\overline{A_1M_1}} = 4$

Položaj M_1 je na sredini žljeba A_1B_1 (dužina žljeba AB je: $\overline{AB} = 2\sqrt{R^2 - a^2}$, tj. $\overline{AB} = 8$). Relativna brzina i relativno ubrzanje tačke u tom položaju su:

$\boxed{v_{r_1}} = 8$ i $\boxed{a_{r_1}} = a_r = 8 = cons$

Prenosna brzina v_{p_1} tačke M, kao brzina koincidentne tačke žljeba, u $t_1 = 1$ je:

$\vec v_{p_1} = \vec\omega_1 \times \overrightarrow{P_{v_1}M_1} \Rightarrow \boxed{v_{p_1}} = \omega_1 \cdot \overline{P_{v_1}M_1} = 8\pi$, $\overline{P_{v_1}M_1} = R + a = 8$ ($\vec v_{p_1} \perp P_{v_1}M$)

Prenosno ubrzanje a_{p_1} tačke M, kao ubrzanje koincidentne tačke žljeba (diska) u $t_1 = 1$ je:

$\vec a_p = \vec a_{D_1} + \vec a^{D_1}_{M_1T} + \vec a^{D_1}_{M_1N}$, $\boxed{a^{D_1}_{M_1T}} = \varepsilon_1 \overline{M_1D_1} = \varepsilon_1 a = 3\pi$ i $\boxed{a^{D_1}_{M_1N}} = \omega_1^2 \overline{M_1D_1} = 3\pi^2$

Apsolutna brzina tačke u $t_1 = 1$ je: $\vec v_1 = \vec v_{r_1} + \vec v_{p_1} \Rightarrow \boxed{v_{1\eta_1}} = v_{r_1} + v_{p_1} = 8 + 8\pi$

$\boxed{v_{1\xi_1}} = 0$

Apsolutno ubrzanje tačke u $t_1 = 1$ je:

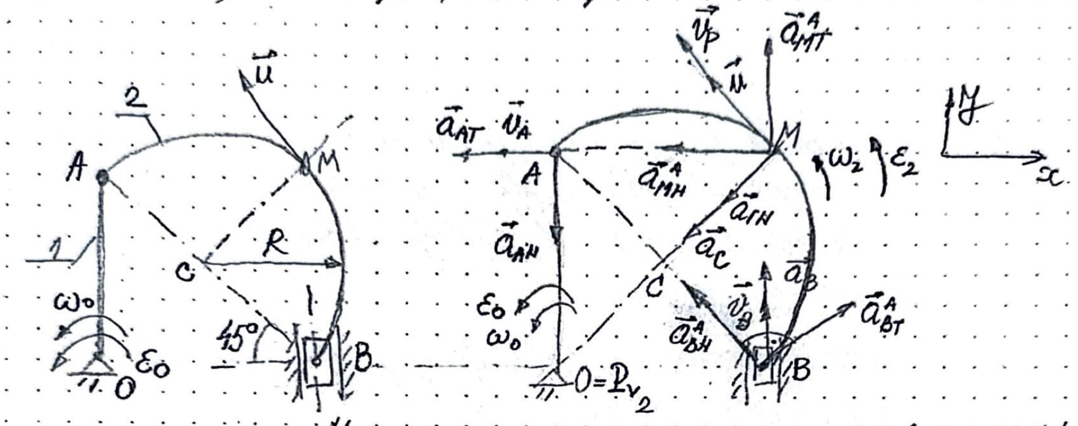
$\vec a_1 = \vec a_{p_1} + \vec a_{r_1} + \vec a_{c_1} = \vec a_{D_1} + \vec a^{D_1}_{M_1T} + \vec a^{D_1}_{M_1N} + \vec a_{r_1} + \vec a_{c_1}$

gde je: $\vec a_{c_1} = 2\vec\omega_1 \times \vec v_1$ i $\boxed{a_{c_1}} = 2\omega_1 v_{r_1} = 16\pi$

$\Rightarrow \boxed{a_{1\eta_1}} = a_{D_1} + a^{D_1}_{M_1T} + a_{r_1} = 8 + 8\pi$

$\boxed{a_{1\xi_1}} = -a^{D_1}_{M_1N} - a_{c_1} = -3\pi^2 - 16\pi$

6) Polukružno savijena žica poluprečnika R dovodi se u kretanje posredstvom krivaje $\overline{OA}=R\sqrt{2}$ i klizača B, koji može da se kreće po pravolinijskoj vođici. Po žici se kreće prsten M konstantnom po intenzitetu relativnom brzinom u. Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje prstena u položaju prikazanom na slici, kada je: $\overline{OA}=\overline{OB}$, $\widehat{AM}=\widehat{MB}$, $\omega_0=u/R$, $\varepsilon_0=u^2/R^2$



Relativno kretanje tačke M je po polukružno savijenoj žici, telu 2. Vektor relativne brzine $\vec v_r$ je u posmatranom trenutku: $\vec v_r=\vec u$, a relativno ubrzanje: $\vec a_r=\vec a_{rT}+\vec a_{rN}$,

gde je: $a_{rT}=\dot v_r=0$, jer je $v_r(t)=u=const$

i $a_{rN}=v_r^2/R_{k_r} \Rightarrow a_{rN}=\frac{u^2}{R}$ (vektor $\vec a_{rN}$ usmeren ka centru relativne kružne trajektorije čiji je centar tačka C).

Prenosno kretanje tačke M je određeno ravnim kretanjem tela 2. Da bi se odredila prenosna brzina $\vec v_p$ i prenosno ubrzanje $\vec a_p$ prstena M kao brzine i ubrzanje koincidentne tačke M_2 tela 2 ($M=M_2$; $\vec v_p=\vec v_{M_2}$ i $\vec a_p=\vec a_{M_2}$) potrebno je analizirati ravno kretanje tela 2.

Kako je $v_A=\omega_0\overline{OA}=u\sqrt{2}$ i $\vec v_A\perp OA$, dok je pravac brzine tačke B ($\vec v_B$) pravac vođica, to se u posmatranom trenutku trenutni pol brzina tela 2, P_{v_2}, poklapa sa tačkom O:

$O=P_{v_2} \Rightarrow v_A=\omega_2\cdot\overline{AP}_{v_2}=\omega_2 R\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\omega_2}=\omega_0=\boxed{u/R}$

Veza između ubrzanja tačaka A i B tela 2 je:

$\vec a_B=\vec a_A+\vec a_{BN}^A+\vec a_{BT}^A$, $\boxed{a_{BN}^A}=\omega_2^2\cdot\overline{AB}=\boxed{2\frac{u^2}{R}}$, $\boxed{a_{BT}^A}=\varepsilon_2\overline{AB}=2\varepsilon_2 R$ i $\vec a_A=\vec a_{AT}+\vec a_{AN}$

gde je: $\boxed{a_{AT}}=\varepsilon_1\cdot\overline{OA}=\frac{u^2}{R}\sqrt{2}$ i $\boxed{a_{AN}}=\omega_1^2\cdot\overline{OA}=\frac{u^2}{R}\sqrt{2}$, pa je:

x: $0=-a_{AT}-a_{BN}^A\frac{\sqrt{2}}{2}+a_{BT}^A\sqrt{2}/2 \Rightarrow a_{BT}^A=4\frac{u^2}{R} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2=2\frac{u^2}{R^2}}$

Prenosna brzina tačke M u posmatranom položaju mehanizma je:

$v_p=v_{M_2}=\omega_2\cdot\overline{MP}_{v_2}=\frac{u}{R}\cdot 2R \Rightarrow \boxed{v_p=2u}$, $\vec v_p\perp OM$,

dok je prenosno ubrzanje:

$\vec a_p=\vec a_{M_2}=\vec a_A+\vec a_{MT}^A+\vec a_{MN}^A=\vec a_{AT}+\vec a_{AN}+\vec a_{MT}^A+\vec a_{MN}^A$, $\boxed{a_{MN}^A}=\omega_2^2\overline{AM}=\boxed{\sqrt{2}\frac{u^2}{R}}$ i $\boxed{a_{MT}^A}=\varepsilon_2\overline{AM}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}u^2}{R}}$

Apsolutna brzina tačke:

$\vec v=\vec v_r+\vec v_p \Rightarrow v=v_r+v_p \Rightarrow \boxed{v=3u}$ ($\vec v_r$ i $\vec v_p$ kolinearni vektori)

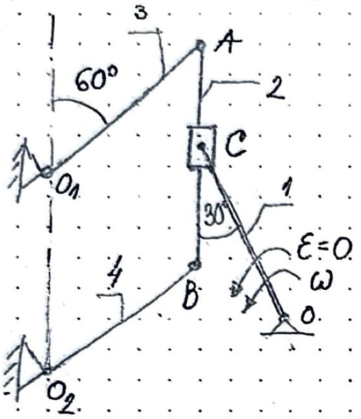
Apsolutno ubrzanje tačke:

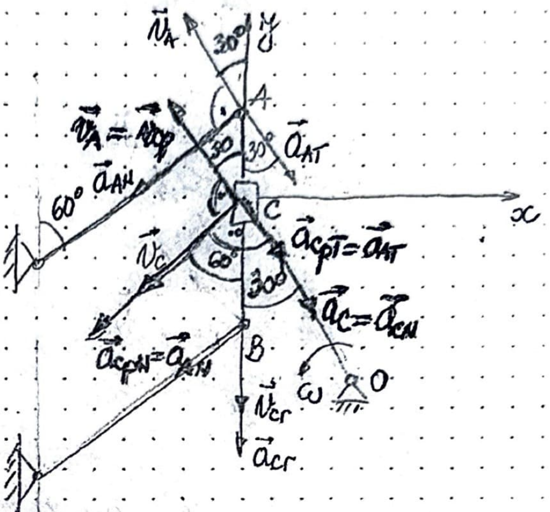
$\vec a=\vec a_r+\vec a_p+\vec a_C=\vec a_{rN}+\vec a_C+\vec a_A+\vec a_{MT}^A+\vec a_{MN}^A$, gde je: $\vec a_C=2\vec\omega_2\times\vec u$, $\boxed{a_C}=2\frac{u^2}{R}$

x: $a_x=-\frac{\sqrt{2}}{2}a_{rN}-\frac{\sqrt{2}}{2}a_C-a_{AT}-a_{MN}^A \Rightarrow a_x=-\frac{7\sqrt{2}}{2}\frac{u^2}{R}$

y: $a_y=-\frac{\sqrt{2}}{2}a_{rN}-\frac{\sqrt{2}}{2}a_C-a_{AN}+a_{MT}^A \Rightarrow a_y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{u^2}{R}$

(7) Krivaja OC mehanizma obrće se oko ose kroz tačku O upravne na ravan kretanja mehanizma, a preko klizača C dovodi u kretanje zglobni četvorougaon O_1ABO_2. U trenutku kada mehanizam zauzima položaj prikaz slikom ugaona brzina krivaje je ω, a njeno ugaono ubrzanje $\varepsilon=0$. Odrediti relativnu brzinu i relativno ubrzanje klizača C u odnosu na štap AB, kao i ugaono ubrzanje štapa O_1A, ako je $\overline{OC}=R$ i $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=2R\sqrt{3}$.





Tačka C klizača zglobno je vezana za tačku C krivaje OC, pa je apsolutna brzina tačke C klizača:

$\vec{v}_C=\vec{\omega}_1\times\vec{OC} \Rightarrow v_C=\omega_1\cdot\overline{OC}=\omega R$ ($\vec{v}_C\perp\overline{OC}$, $\angle(AB,\vec{v}_C)=60^\circ$),

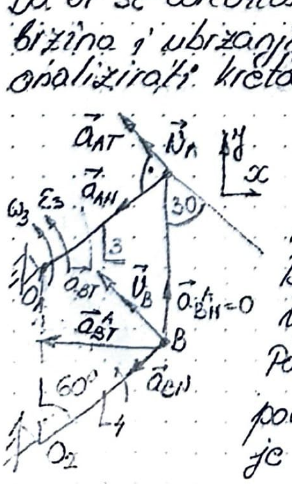
dok je njeno apsolutno ubrzanje:

$\vec{a}_C=\vec{a}_{CT}+\vec{a}_{CN}$; $\vec{a}_{CT}=\vec{\varepsilon}_1\times\vec{OC}=0$ i $a_{CN}=\omega_1^2\overline{OC}=\omega^2R$ i $\vec{a}_C=\vec{a}_{CN}$.

S druge strane, tačka C klizača se zajedno sa klizačem kreće po štapu AB zglobnog četvorougaonika O_1ABO_2, tj. tačka C vrši složeno kretanje koje se može se razložiti na pravolinijsko relativno kretanje i prenosno kretanje koje je posledica ravnog kretanja štapa AB u ravni slike.

Vektor relativne brzine $\vec{v}_{Cr}$ i vektor relativnog ubrzanja ($\vec{a}_{Cr}$ tačke C klizača) imaju pravac štapa AB u posmatranom trenutku, ali su smerovi i intenziteti ove dve kinematske veličine nepoznati. Zbog toga se smerovi vektora $\vec{v}_{Cr}$ i $\vec{a}_{Cr}$ pretpostavljaju.

Da bi se odredila prenosna brzina $\vec{v}_{Cp}$ i prenosno ubrzanje $\vec{a}_{Cp}$ tačke C klizača kao brzina i ubrzanje koincidentne tačke C_2 štapa AB ($C_2\equiv C$, $\vec{v}_{Cp}=\vec{v}_{C_2}$ i $\vec{a}_{Cp}=\vec{a}_{C_2}$) potrebno analizirati kretanje štapa AB kao člana zglobnog četvorougaonika O_1ABO_2.



Četvorougaonik O_1ABO_2 je paralelogram ($O_1A\parallel O_2B$ i $AB\parallel O_1O_2$).

Brzina i ubrzanje tačke A krivaje O_1A (telo 3) su:

$v_A=\omega_3\overline{O_1A}=2\sqrt{3}\,\omega_3R$; $\vec{a}_A=\vec{a}_{AT}+\vec{a}_{AN}$, $a_{AT}=\varepsilon_3\cdot2\sqrt{3}R$ i $a_{AN}=2\sqrt{3}\,\omega_3^2R$

Brzina i ubrzanje tačke B krivaje O_2B (telo 4) su:

$v_B=\omega_4\overline{O_2B}=2\sqrt{3}\,\omega_4R$; $\vec{a}_B=\vec{a}_{BT}+\vec{a}_{BN}$, $a_{BT}=\varepsilon_4 2\sqrt{3}R$, $a_{BN}=2\sqrt{3}\,\omega_4^2R$

Pošto je $\vec{v}_A\perp O_1A$ i $\vec{v}_B\perp O_2B$ i $O_1A\parallel O_2B \Rightarrow \vec{v}_A\parallel\vec{v}_B$, pa je trenutni pol brzina štapa AB (telo 2), P_{v_2}, u beskonačnosti, što znači da je njegova trenutna ugaona brzina $\boxed{\omega_2=0}$. To znači da je

$\vec{v}_A = \vec{v}_B$; $\vec{v}_A = \vec{v}_{c_2}$, odnosno $\boxed{\vec{v}_{cp} = \vec{v}_A}$ $(\measuredangle(c_y, \vec{v}_{cp}) = 30^\circ)$

Kako je $v_A = v_B$ i $\overline{O_1A} = \overline{O_2B}$ to je $\omega_3 = \omega_4 \Rightarrow a_{AN} = a_{BN} = 2\sqrt{3}R\omega_4$ i $\boxed{\vec{a}_{AN} = \vec{a}_{BN}}$, dok su vektori $\vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}_{BT}$ međusobno paralelni $(\vec{a}_{AT} \parallel \vec{a}_{BT})$.

Veza između ubrzanja tačaka A i B, $\vec{a}_A$ i $\vec{a}_B$, kao tačaka štapa AB je:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_{BT} + \vec{a}_{BN} = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{BN} + \vec{a}_{BT}^{A} + \vec{a}_{BN}^{A}, \\ \text{gde su: } a_{BN}^{A} = \omega_2^2 \cdot \overline{AB} = 0 \;;\; a_{BT}^{A} = \varepsilon_2 \overline{AB} \;\text{ i }\; \vec{a}_{AN} = \vec{a}_{BN}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{BT} = \vec{a}_{AT} + \vec{a}_{BT}^{A}}$$

y: $a_{BT}\cos 30^\circ = a_{AT}\cos 30^\circ$

x: $-a_{BT}\sin 30 = -a_{AT}\sin 30^\circ - a_{BT}^{A}$

Iz poslednje 2 jednačine sledi da je:

$a_{BT} = a_{AT} \Rightarrow \varepsilon_3 = \varepsilon_4$ i $\vec{a}_{BT} = \vec{a}_{AT}$

kao i da je:

$a_{BT}^{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 0}$ što znači da štap AB (2) vrši kružno translatorno kretanje, pa sve tačke štapa AB imaju ne samo jednake brzine nego i ubrzanja.

To znači da je: $\vec{a}_{cp} = \vec{a}_{c_2} = \vec{a}_A$ i $\vec{a}_{cpT} = \vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}_{cpN} = \vec{a}_{AN}$.

Apsolutna brzina $\vec{v}_c$ tačke C je sada:

$\vec{v}_c = \vec{v}_{cp} + \vec{v}_{cr} \Rightarrow x: -v_c\cos 30^\circ = -v_{cp}\cos 60^\circ \Rightarrow \boxed{v_{cp}} = \sqrt{3}\, v_c = \boxed{\sqrt{3}\omega R} \Rightarrow \omega_3 = \omega_4 = \frac{\omega}{2}$

$y: -v_c \sin 30 = v_{cp}\sin 60 - v_{cr} \Rightarrow v_{cr} = \frac{3}{2}\omega R + \frac{1}{2}\omega R \Rightarrow \boxed{v_{cr} = 2\omega R}$

Apsolutno ubrzanje tačke C je sada:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_c = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_{cr} + \vec{a}_C, \\ \text{gde je } \vec{a}_C = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{cr} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}_{cN} + \overset{0}{\vec{a}_{cT}} = \vec{a}_{cpN} + \vec{a}_{cpT} + \vec{a}_{cr}$$

x: $a_{cN}\sin 30 = -a_{cpN}\cos 30^\circ + a_{cpT}\sin 30^\circ$

$\omega^2 R\frac{1}{2} = -\frac{\omega^2}{4} 2\sqrt{3}R\frac{\sqrt{3}}{2} + a_{cpT}\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_{cpT}} = \frac{5}{2}\omega^2 R \Rightarrow \boxed{\varepsilon_3 = \frac{5\sqrt{3}}{12}\omega^2}$

y: $-a_{cN}\cos 30 = -a_{cpN}\sin 30^\circ - a_{cpT}\cos 30^\circ - a_{cr}$

$\boxed{a_{cr} = -\sqrt{3}R\omega^2}$

Pogledati iz zbirke zadatke: 5.19; 5.20; 5.21; 5.22