Lagranževe jednačine prve vrste

Uvod.-

Veza je telo koje ograničava stanje kretanja materijalnog objekta sa kojim je u kontaktu. Vezani materijalni objekat ne može zauzeti bilo koji položaj u prostor, a u vezama dozvoljenim položajima ne može imati bilo kakve brzinske karakteristike. To znači da „vrednosti" generalisanih koordinata i generalisanih brzina tog materijalnog kao slobodnog, moraju da zadovolje odgovarajuće jednačine i nejednačine. Ove relacije predstavljaju analitičke modele samih veza i dalje ćemo njih nazivati, kratko, veze.

Pošto su ograničenja stanja kretanja vezanih tela posledica ograničenja stanja kretanja kontaktnih tačaka tela sa vezom, tipovi veza biće analizirani u slučaju kada je vezani materijalni objekat, vezana materijalna tačka M.

Veličina položaja tačke M je vektor položaj te tačke u odnosu na referentnu, nepokretnu tačku O, odnosno, njene koordinate u odnosu, npr, nepokretni DKS Oxyz: x, y, z, pri čemu je: $\vec{r} = \{x, y, z\}$.

Veličina brzine tačke M je njen vektor brzine $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ koji je u DKS Oxyz određen kao: $\vec{v} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$.

U slučaju kada je posmatrana tačka slobodna, ne uvodeći u razmatranje sile koje deluju na nju, navede veličine položaja ($\vec{r}$, odnosno x, y, z) i veličine brzine ($\vec{v}$, odnosno $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) mogu da imaju bilo koje „vrednosti".

Međutim, kada je tačka vezana, kao što je napred rečeno, ove veličine, tj. vrednosti tih veličina ne mogu (biti) bilo kakve, već moraju da zadovolje analitičke modele veza koje ograničavaju njeno stanje kretanja.

Broj stepeni slobode kretanja vezane tačke je manji od broja stepeni slobode kretanja slobodne tačke: $n < 3$.

Klasifikacija veza

Veza koja je u formi jednačine naziva se zadržavajuća veza. Naziv zadržavajuća potiče od činjenice da tačka tokom kretanja ne napušta vezu.
Najjednostavniji oblik te veze je: $f(\vec{r})=0$, odnosno, $f(x,y,z)=0$. Funkcija veze $f=f(x,y,z)$ u ovom slučaju je funkcija 3 nezavisne promenljive: x, y i z koje predstavljaju koordinate tačke M u DKS Oxyz, a koje su tokom kretanja tačke funkcije vremena ($x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$). Funkcija veze u ovom slučaju nije funkcija vremena t na eksplicitan način, zbog čega je veza stacionarna, tj. ne menja svoju formu tokom vremena. Takođe, funkcija veze ne zavisi eksplicitno od veličina brzine tačke: $\vec{v}=\{\dot{x},\dot{y},\dot{z}\}$, zbog čega je veza geometrijska ili integrabilna. Međutim, to ne znači da ova veza, kao što ćemo videti, ne ograničava na indirektan način i brzinu i ubrzanje tačke.
Veza $f(x,y,z)=0$ zbog svega navedenog, naziva se stacionarna, geometrijska, zadržavajuća veza. U smislu analitičke geometrije ova veza predstavlja nepokretnu i nedeformabilnu površ u DKS Oxyz (Primer: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$)
Ako jednačina veze ima oblik $f(t,x,y,z)=0$, onda se takva veza naziva nestacionarna, geometrijska, zadržavajuća veza. Mehanički model ove veze je vremeski promenljiva površ u DKS Oxyz, tj. površ koja se deformiše i kreće tokom vremena, u najopštijem slučaju
Zadržavajuća veza čija funkcija veze zavisi od vremena t, veličina položaja tačke i od veličina brzine tačke: $f(t,\vec{r},\vec{v})=0$, odnosno, $f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$, naziva se stacionarna, kinematska (diferencijalna) zadržavajuća veza. Ova veza na direktan način ograničava brzinu tačke u njenim vezama dozvoljenim položajima. Jednačina veze: $f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$ kao diferencijalna jednačina prvog reda po funkcijama $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$ nije integrabilna. Ako to ne bi važilo, veza bi bila kvazikinematska, tj. u suštini bi bila geometrijska. (geometrijske veze ponekad je prirodnije i lakše zadati u formi kvazikinematske veze; primer: kotrljanje sa klizanjem, kotrljanje bez klizanja, klizni par)
Primeri kinematskih veza su: kotrljanje bez klizanja sfere po nepokretnoj površi; Čapliginovo sečivo (sečivo klizaljki, točkovi rolera).
Nezadržavajuće veze imaju formu nejednačina. Primer: $f(t,\vec{r})\geq 0$ (tačka može da se kreće ili po površi $f(t,\vec{r})=0$ ili u delu prostora definisanom nejednačinom $f(t,\vec{r})>0$, kao prividno slobodna).
U klasičnoj, Njutnovoj mehanici bavimo se samo stacionarnim, geometrijskim, zadržavajućim vezama. Mehanički modeli ovih veza su: sferni zglob, cilindrični pokretni i nepokretni zglobovi, lako neistegljivo uže, laki kruti štap, kruta podloga. Jedna veza, npr. sferni zglob može se predstaviti sa više (3) jednačine navedenog tipa. (Navedene veze ograničavaju položaje kontaktnih tačaka tela sa vezom)

Elementarno virtuelno pomeranje tačke na površi $f(x,y,z)=0$. Reakcija idealne veze.-

Pretpostavimo da se tačka M može kretati po površi $f(x,y,z)=0$. U nekom trenutku t ona se poklapa sa tačkom $M(x,y,z)$ površi koje zadovoljavaju jednačinu veze: $t: M(x,y,z)$ i $f(x,y,z)=0$.

U beskonačno maloj okolini okolini položaja M tačke u trenutku t mogu se uočiti beskonačno mnogo tačaka površi. Ove tačke površi predstavljaju za tačku M njene virtuelne (zamišljene) položaje u trenutku t. Ovi virtuelni položaji tačke M u trenutku t pripadaju takođe i ravni π koja je tangentna na površ u tački M površi. Uočimo jedan od ovih virtuelnih položaja tačke M u trenutku t, M^*. Koordinate tog položaja su x^*, y^*, z^*: $t: M^*(x^*, y^*, z^*)$ i $f(x^*, y^*, z^*)=0$ i $\vec{r}^* = \{x^*, y^*, z^*\}$, gde su: $x^*-x \approx \delta x$, $y^*-y \approx \delta y$ i $z^*-z=\delta z$. Veličine $\delta x, \delta y, \delta z$ su virtuelni (zamišljeni) priraštaji koordinata položaja M tačke u trenutku t. i predstavljaju male veličine prvog reda

Vektor položaja virtuelnog položaja M^* položaja M tačke u trenutku t u odnosu na položaj tačke M u trenutku t je vektor: $\delta\vec{r} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}$

$\delta\vec{r} \approx \overrightarrow{MM^*}$; $\delta\vec{r} \approx \vec{r}^*(t) - \vec{r}(t)$, vektor elementarnog virtuelnog pomeranja tačke M

Ovaj vektor naziva se vektor elementarnog virtuelnog pomeranja tačke M u trenutku t. Pri analizi elementarnog virtuelnog trenutka t, tj.: $dt=0$.

Vreme ne teče u okolini trenutka t,

Dakle: elementarno virtuelno pomeranje tačke na vezi u nekom trenutku t predstavlja pomeranje te tačke iz njenog položaja M na vezi u trenutku t u bilo koji drugi virtuelni, vezom dozvoljeni položaj M^* u tom istom trenutku.

Pošto virtuelni položaj M^* u trenutku t na vezi $f(x,y,z)=0$ leži u tangentnoj ravni π u tački M te veze, to i vektor $\delta\vec{r}$ elementarnog virtuelnog pomeranja tačke M u tom trenutku leži u toj ravni: $\boxed{\delta\vec{r} \in \pi}$

Vektor normale na ovu ravan određen je vektorom $\mathrm{grad} f$: $\mathrm{grad} f \perp \pi$,

gde je: $\mathrm{grad} f: \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, to je:

$\boxed{\mathrm{grad} f \cdot \delta\vec{r} = 0}$ i $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0}$

Reakcija idealne veze $f(x,y,z)=0$ u bilo kom trenutku t upravna je na bilo koje elementarno virtuelno, vezom dozvoljeno pomeranje tačke M po vezi u tom trenutku.

(kontaktne tačke tela i veze) (idealno glatke površi)

To znači da je reakcija idealne veze $f(x,y,z)=0$ u pravcu vektora $\mathrm{grad}\, f$, u tački M veze:

$$\boxed{\vec{N} = \lambda(t)\,\mathrm{grad} f} \Rightarrow \boxed{\vec{N} = \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}} \quad (1)$$

gde je $\lambda = \lambda(t)$ Lagranžev množitelj veze.

Elementarno stvarno pomeranje i brzina tačke M na vezi $f(x,y,z)=0$

Pod elementarnim stvarnim pomeranjem tačke M, $d\vec{r}$, po vezi $f(x,y,z)=0$, u na bilo kom beskonačno malom intervalu vremena $[t, t_1=t+dt]$, podrazumeva se beskonačno malo pomeranje tačke M koje je u skladu sa jednačinom veze i sistemom sila koji deluje na nju.

Neka je u trenutku t tačka zauzimala položaj M na vezi:

$t: M(x,y,z)$, $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, $\vec{r}=\{x(t), y(t), z(t)\}$

i $f(x,y,z)=0$ ($z=g(x,y) \Rightarrow n=2$)

U trenutku $t_1=t+dt$ tačka je, pod dejstvom aktivnih sila, prešla u položaj M_1 koji se nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M na vezi tako da je:

$t_1=t+dt$: $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $x_1=x(t+dt)\approx x+dx$, $y_1=y(t+dt)\approx y+dy$ i

$z_1=z(t+dt)\approx z+dz$, $\vec{r}_1=\vec{r}(t+dt)\approx \vec{r}(t)+d\vec{r}$

i $f(x_1,y_1,z_1)=0 \Rightarrow f(x+dx, y+dy, z+dz)=0$ $(M_1\in f(x,y,z)=0)$

Pošto se tačka M_1 nalazi u beskonačno maloj okolini tačke M površi u trenutku t, to se do malih veličina prvog reda, može smatrati da se položaji M i M_1 nalaze u tangentnoj ravni π na površ $f(x,y,z)=0$ u tački M površi. Položaj M_1 tačke M u trenutku $t_1=t+dt$ predstavlja jedan od virtuelnih (zamišljenih) položaja M^* u trenutku t.

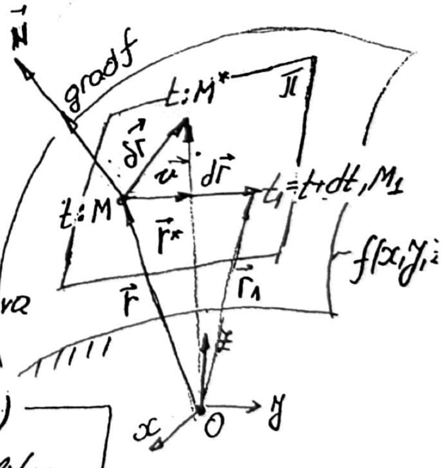
Vektor elementarnog stvarnog pomera tačke u trenutku t po vezi, $d\vec{r}$, je:

$d\vec{r}\approx \vec{r}(t+dt)-\vec{r}(t) \Rightarrow d\vec{r}=\overrightarrow{MM_1}$ i $d\vec{r}=\{dx,dy,dz\}$

i leži u ravni π, tj. $\boxed{d\vec{r}\in\pi}$, pa je: $\boxed{d\vec{r}\perp \mathrm{grad} f}$ i

$\mathrm{grad} f\cdot d\vec{r}=0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{grad} f\cdot\vec{v}=0}$, $(d\vec{r}=\vec{v}dt)$ (2)

odnosno: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=0}$ (2')



Iz (1) sledi da je: $\vec{v}\perp \mathrm{grad} f$ i $\boxed{\vec{v}\in\pi}$

Jednačina (2), odnosno (2'), pokazuje da geometrijska veza $f(x,y,z)=0$ na indirektan način ograničava brzinu tačke M: $\vec{v}=\{\dot{x},\dot{y},\dot{z}\}$ tokom njenog kretanja po vezi.

Geometrijska veza $f(x,y,z)=0$ na indirektan način ograničava i ubrzanje tačke, $\vec{a}$:

$\frac{d}{dt}(\mathrm{grad} f\cdot\vec{v})=0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{grad} f\cdot\vec{a}+\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}(\mathrm{grad} f)=0}$ (3)

$\vec{a}\notin\pi$

Jednačina (2), odnosno (2') može se napisati i u obliku:

$$\frac{df}{dt}=0, \qquad (2''')$$

a jednačina (3) je tada:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=0 \qquad (3')$$

Lagranževe jednačine I vrste za slučaj kretanja tačke po idealno glatkoj nepokretnoj površi $f(x,y,z)=0$. -

Posmatra se kretanje tačke M mase m na koju deluje sistem aktivnih sila čija je rezultanta $\vec{F}_r$, a po glatkoj, stacionarnoj zadržavajućoj vezi čija je jednačina u odnosu na DKS Oxyz: $f(x,y,z)=0$.
Nakon oslobađanja od veze i uvođenja reakcije veze (1):

$$\vec{N}=\lambda(t)\,\mathrm{grad}\,f=\left\{\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x},\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y},\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial z}\right\},$$

diferencijalna jednačina kretanja tačke M u vektorskom obliku glasi

$$m\vec{a}=\vec{F}_r+\vec{N}. \quad (4)$$

pa diferencijalne jednačine kretanja tačke M u DKS Oxyz imaju oblik:

$$m\ddot{x}=X_r+\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad (5)$$

$$m\ddot{y}=Y_r+\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} \; i \quad (6)$$

$$m\ddot{z}=Z_r+\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial z}. \quad (7)$$

Diferencijalne jednačine (5), (6) i (7) nazivaju se Lagranževe jednačine prve vrste. Ovaj sistem od 3 jednačine zajedno sa jednačinom veze:

$$f(x,y,z)=0 \quad (8)$$

predstavlja sistem od 4 jednačine iz kojeg se, za zadate početne uslove:

$$t_0=0,\ x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0),\ \dot{x}_0=\dot{x}(t_0),\ \dot{y}_0=\dot{y}(t_0),\ \dot{z}=\dot{z}(t_0) \quad (9)$$

određuju konačne jednačine kretanja tačke u DKS Oxyz: $x=x(t), y=y(t)$ i $z=z(t)$ i Lagranžev množitelj veze: $\lambda=\lambda(t)$.
Pri rešavanju sistema jednačina (5),(6),(7) i (8) kao pomoćne jednačine koriste se jednačine (2''') i (3'):

$$\frac{df}{dt}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}=0 \quad (10)$$

$$\text{i } \frac{d^2f}{dt^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\ddot{z}+\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0. \quad (11)$$

Takođe, pri zadavanju početnih uslova kretanja tačke (9) treba voditi računa da oni budu u skladu sa jednačinama (8) i (10), tj. da važi:

$$f(x_0,y_0,z_0)=0 \text{ i}$$

$$\vec{v}_0\cdot(\mathrm{grad}f)_{M_0}=0 \Rightarrow \dot{x}_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}+\dot{y}_0\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}+\dot{z}_0\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}=0.$$

Dodatne lekcije

1. Lagranževe jednačine I vrste za slučaj kretanja tačke po hrapavoj površi ($\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_\mu$, $|\vec{F}_\mu|=\mu_0|\vec{N}|$ i $\vec{F}_\mu=-\mu|\vec{N}|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$)

2. - Lagranževe jednačine I vrste za slučaj kretanja tačke po glatkoj liniji u 3D-euklidskom prostoru (Linija u 3D euklidskom prostoru zadaje se kao presek dve površi: $f_1(x,y,z)=0$ i $f_2(x,y,z)=0$; reakcija glatke linije: $\vec{N}=\vec{N}_1+\vec{N}_2$, gde je $\vec{N}_1=\lambda_1(t)\,\mathrm{grad}f_1$ i $\vec{N}_2=\lambda_2(t)\,\mathrm{grad}f_2$,