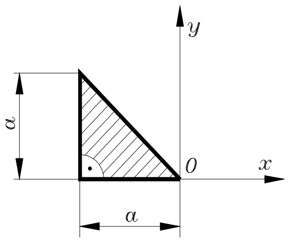
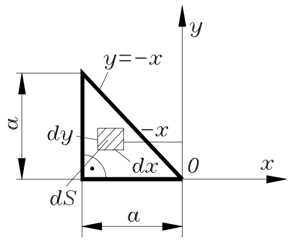
Dakle, težište tetraedra nalazi se na duži koja spaja vrh tetraedra sa težištem osnove i to na *l/4* te duži, mereno od osnove.

Zadaci

Zadatak 10.1. Odrediti statički moment površine, u odnosu na osu *Oy*, tanke trougaone ploče date na slici.



uz zadatak 10.1.

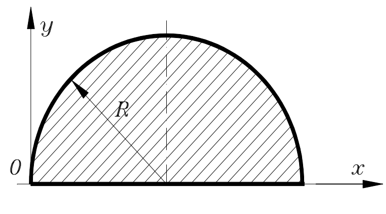


10.1.a.

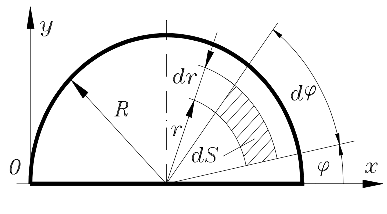
Rešenje: *Uočavajući elementarnu površinu (slika 10.1.a.), i koristeći izraz (10.10) statički moment date površine je*

$$S_y = \int_S (-x)dS = -\int_{-a}^{0}\int_{0}^{-x} xdxdy = -\int_{-a}^{0} xy\Big|_0^{-x} dx = \int_{-a}^{0} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{0} = -\frac{a^3}{3}\cdot$$

Zadatak 10.2. Za tanku polukružnu ploču poluprečnika *R*, odrediti statički moment površine u odnosu na osu *Ox*.



uz zadatak 10.2.

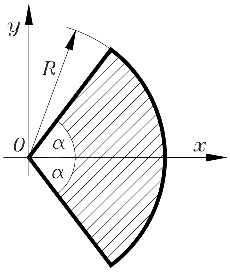


10.2.a.

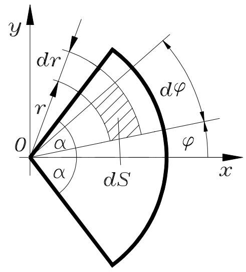
Rešenje: *Statički moment površine polukružne ploče, u odnosu na osu Ox, koristeći elementarnu površinu prikazanu na slici 10.2.a., određen je izrazom (10.10) kao*

$$S_y = \int_S ydS = \int_0^{\pi}\int_0^{R} rsin\varphi\, rd\varphi\, dr = \int_0^{\pi} sin\varphi \frac{r^3}{3}\Big|_0^R d\varphi = \frac{R^3}{3} cos\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}R^3\cdot$$

Zadatak 10.3. Odrediti položaj težišta površine oblika kružnog isečka datog na slici.



uz zadatak 10.3.



10.3.a.

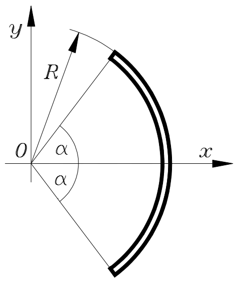
Rešenje: *Kako je osa Ox osa simetrije datog kružnog isečka, može se zaključiti da je* y*-koordinata težišta poznata, tj.* $y_C = 0$*. Za određivanje x- koordinate težišta, primenjuje se izraz (10.41), pa se uočavanjem elementarne površine sa slike 10.3.a. dobija*

$$x_C = \frac{\int\limits_S x dS}{S} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_{0}^{R} r cos\varphi \, r dr d\varphi}{R^2\alpha} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} cos\varphi \frac{R^3}{3} d\varphi}{R^2\alpha} = \frac{2}{3}\frac{R sin\alpha}{\alpha}.$$

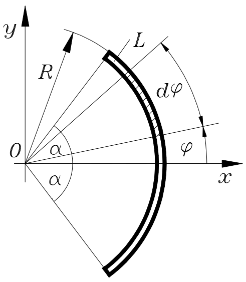
Ako se određuje težište površine oblika polukruga, iz prethodnog izraza za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *sledi da je*

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}.$$

Zadatak 10.4. Odrediti položaj težišta kružnog luka datog na slici.



uz zadatak 10.4.

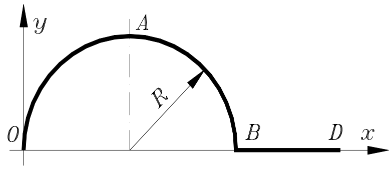


10.4.a.

Rešenje: *Osa Ox je osu simetrije datog kružnog luka, pa je y- koordinata težišta poznata, tj.* $y_C = 0$*. Na osnovu izraza (10.42) i koristeći elementarnu liniju sa slike 10.4.a., dobija se x- koordinata težišta, tj.*

$$x_C = \frac{\int_L xdL}{L} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} Rcos\varphi Rd\varphi}{2R\alpha} = \frac{R^2 sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{2R\alpha} = \frac{Rsin\alpha}{\alpha}.$$

Zadatak 10.5. Odrediti koordinate težišta homogene linijske konture *OABD*, sastavljene od polukruga *OAB* poluprečnika *R* i pravolinijskog odsečka *BD* dužine *R*.



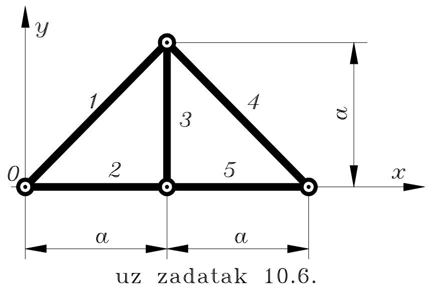
uz zadatak 10.5.

Rešenje: *Primenom izraza (10.48) dobija se*

$$x_C = \frac{\sum \Delta L_i x_{C_i}}{L} = \frac{R\pi \cdot R + R \cdot \frac{5}{2}R}{R\pi + R} = \frac{2\pi + 5}{2(\pi + 1)}R,$$

dok se korišćenjem izraza za težište polukružnog luka (**zadatak 10.4.** *za* $\alpha = \pi / 2$*) za y-koordinatu težišta dobija*

$$y_C = \frac{\sum \Delta L_i y_{C_i}}{L} = \frac{R\pi \cdot \frac{2R}{\pi} + R \cdot 0}{R\pi + R} = \frac{2R}{\pi + 1}.$$



uz zadatak 10.6.

Zadatak 10.6. Odrediti koordinate težišta rešetkaste konstrukcije koja se sastoji od homogenih štapova istog poprečnog preseka koji su izrađeni od istog materijala.

Rešenje: *Konstrukcija je simetrična u odnosu na osu koja se poklapa sa pravcem štapa 3 pa je* $x_C = a$. *Koristeći izraz (10.48), dobija se da je*

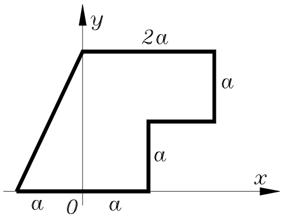
$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{5} L_i y_{C_i}}{\sum_{i=1}^{5} L_i} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} + a \cdot 0 + a \cdot \frac{a}{2} + a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} + a \cdot 0}{a\sqrt{2} + a + a + a\sqrt{2} + a} = 0{,}328a.$$

Zadatak 10.7. Data je ploča oblika prikazanog na slici. Odrediti koordinate težišta date ploče.

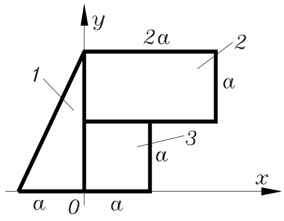
Rešenje: *I način:* *Ploča se može podeliti na tri dela, kako je pokazano na slici 10.7.a.. Koristeći metodu rastavljanja, tj. izraze (10.47) dobija se*

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{3}S_i x_{C_i}}{\sum_{i=1}^{3}S_i}=\frac{\frac{a}{2}\cdot 2a\cdot(-\frac{a}{3})+a\cdot a\cdot\frac{a}{2}+2a\cdot a\cdot a}{\frac{a}{2}\cdot 2a+a\cdot a+2a\cdot a}=\frac{13}{24}a,$$

$$y_C=\frac{\sum_{i=1}^{3}S_i y_{C_i}}{\sum_{i=1}^{3}S_i}=\frac{\frac{a}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2a}{3}+a\cdot a\cdot\frac{a}{2}+2a\cdot a\cdot\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}\cdot 2a+a\cdot a+2a\cdot a}=\frac{25}{24}a.$$

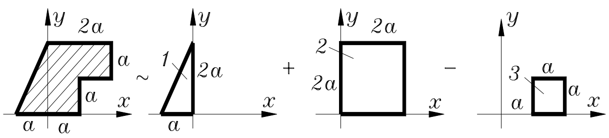


uz zadatak 10.7.



10.7.a.

<u>II način:</u> *Koristeći metodu "negativnih težina" (slika 10.7.b.) iz izraza (10.52) dobija se*



10.7.b.

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{2}S_i x_{C_i}-S_3x_{C_3}}{\sum_{i=1}^{2}S_i-S_3}=\frac{\frac{a}{2}\cdot 2a\cdot(-\frac{a}{3})+2a\cdot 2a\cdot a-a\cdot a\cdot\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}\cdot 2a+2a\cdot 2a-a\cdot a}=\frac{13}{24}a,$$

$$y_C=\frac{\sum_{i=1}^{2}S_i y_{C_i}-S_3y_{C_3}}{\sum_{i=1}^{2}S_i-S_3}=\frac{\frac{a}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2a}{3}+2a\cdot 2a\cdot a-a\cdot a\cdot\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\cdot 2a+2a\cdot 2a-a\cdot a}=\frac{25}{24}a.$$

<u>Zadatak 10.8.</u> Date su *Dekartove* koordinate temena trougaone ploče $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ i $C(x_C,y_C,z_C)$. Odrediti koordinate težišta T trougaone ploče.

Rešenje: *Na osnovu slike 10.8.a., može se pisati*

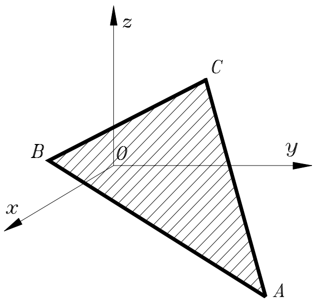
$$\vec{r}_T=\vec{r}_A+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DT},\quad \vec{r}_T=\vec{r}_B+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FT},\quad \vec{r}_T=\vec{r}_C+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ET}.$$

sabiranjem prethodnih triju jednačina dobija se

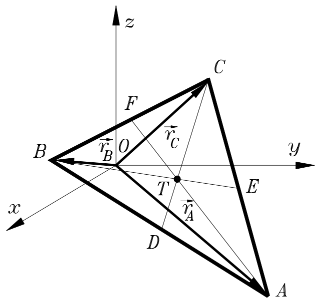
$$3\vec{r}_T = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{FT} + \overrightarrow{ET}.$$

Kako je

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0$$



uz zadatak 10.8.



10.8.a.

i

$$\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

može se pisati da je

$$\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{FT} + \overrightarrow{ET} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EB}) = 0.$$

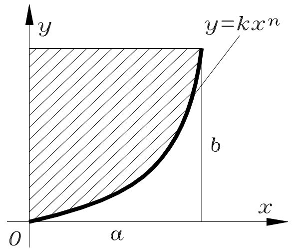
Dakle, na osnovu pokazanog, važi

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C),$$

odnosno

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \qquad y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \qquad z_T = \frac{z_A + z_B + z_C}{3},$$

što je i trebalo odrediti.



uz zadatak 10.9.

Zadatak 10.9. Odrediti koordinate težišta površine koju parabola $y = kx^n$ zaklapa sa y - osom.

Rešenje: *Koordinate težišta date površine određene su relacijama*

$$x_C = \frac{\int_S x dS}{S}, \qquad y_C = \frac{\int_S y dS}{S}.$$

Veličine koje su neophodne za određivanje koordinata težišta C nalaze se na sledeći način

$$S = \int_S dS = \int_0^a \int_{kx^n}^b dxdy = \int_0^a y\Big|_{kx^n}^b dx = (bx - k\frac{x^{n+1}}{n+1})\Big|_0^a = \frac{abn}{n+1},$$

$$\int_S xdS = \int_0^a \int_{kx^n}^b xdxdy = \int_0^a xy\Big|_{kx^n}^b dx = (b\frac{x^2}{2} - k\frac{x^{n+2}}{n+2})\Big|_0^a = \frac{a^2bn}{2(n+2)},$$

$$\int_S ydS = \int_0^a \int_{kx^n}^b ydxdy = \int_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_{kx^n}^b dx = \frac{1}{2}(b^2x - k^2\frac{x^{2n+1}}{2n+1})\Big|_0^a = \frac{a^2bn}{2n+1},$$

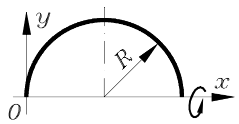
pa je

$$x_C = \frac{a(n+1)}{2(n+2)}, \qquad y_C = \frac{b(n+1)}{2n+1}.$$

Ako se određuju koordinate težišta kvadratne parabole (n=2), dobija se

$$x_C = \frac{3a}{8}, \qquad y_C = \frac{3b}{5}.$$

Zadatak 10.10. Odrediti površinu lopte koja nastaje obrtanjem polukružne linije, poluprečnika *R*, oko ose *Ox*.

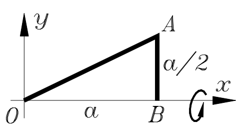


uz zadatak 10.10.

Rešenje: *Položaj težišta kružnog luka određen je u* ***zadatku 10.4.****. U odnosu na dati Dekartov koordinatni sistem, za* $\alpha = \pi/2$, *važi da je* $y_C = 2R/\pi$ *i* $x_C = R$. *Kako je dužina polukružne linije* $L = R\pi$, *primenom prve Guldinove teoreme, za ugao obrtanja* $\varphi = 2\pi$, *onosno primenom izraza (10.63), dobija se da je površina lopte*

$$S = L \cdot y_C \cdot 2\pi = R\pi \cdot \frac{2R}{\pi} 2\pi = 4R^2\pi.$$

Zadatak 10.11. Odrediti površinu kupe nastale obrtanjem izlomljene linije *OAB* koja sa delom *OB* ose *Ox*, oko koje se obrće, čini trougao.



uz zadatak 10.11.

Rešenje: *Dužina izlomljene linije OAB je*

$$L = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}),$$

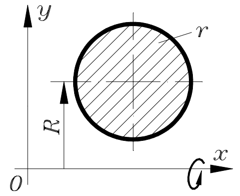
a njena y- koordinata težišta data je sa

$$y_C = \frac{\overline{OA}\frac{a}{4} + \overline{AB}\frac{a}{4}}{\overline{OA} + \overline{AB}} = \frac{a}{4}.$$

Primenom prve Guldinove teoreme za ugao obrtanja $\varphi = 2\pi$ *dobija se tražena površina kupe*

$$S = L \cdot y_C \cdot 2\pi = \frac{a^2\pi}{4}(1+\sqrt{5})\cdot$$

Zadatak 10.12. Odrediti zapreminu torusa nastalog obrtanjem oko ose *Ox* površine oblika kruga poluprečnika *r*.



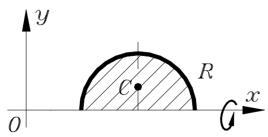
uz zadatak 10.12.

Rešenje: *Primenom druge Guldinove teoreme, odnosno primenom izraza (10.68), dobija se da je zapremina torusa*

$$V = Sy_C\varphi = r^2\pi \cdot R \cdot 2\pi = 2\pi^2 r^2 R,$$

gde je površina kruga čijim obrtanjem nastaje torus $S = r^2\pi$*. Pri tome, y- koordinata težišta površine je* $y_C = R$*, a njen ugao obrtanja oko ose Ox je* $\varphi = 2\pi$*.*

Zadatak 10.13. Zapremina lopte, poluprečnika *R*, je $V = \frac{4}{3}R^3\pi$. Odrediti *y*- koordinatu težišta površine polukruga čijim obrtanjem oko ose *Ox* je nastala ta lopta.



uz zadatak 10.13.

Rešenje: *Primenom druge Guldinove teoreme, iz izraza (10.68) dobija se da je*

$$\frac{4}{3}R^3\pi = S \cdot y_C \cdot 2\pi,$$

gde je $S = \frac{R^2\pi}{2}$*. Tada je y- koordinatu težišta površine polukruga data sa*

$$y_C = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4R}{3\pi}\cdot$$

Zadatak 10.14. Odrediti *y*- koordinatu težišta kupe osnove poluprečnika *R* i visine *h*.

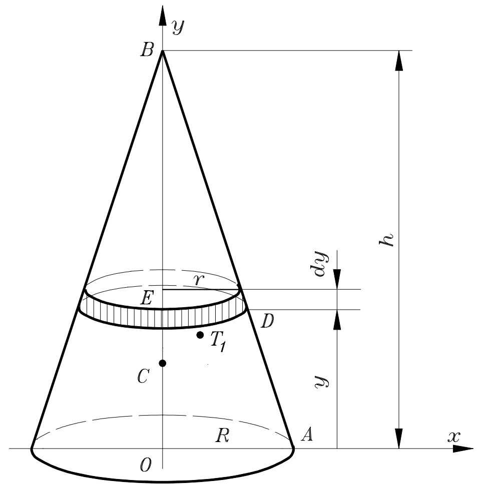
Rešenje: *Kupa je nastala obrtanjem oko ose Oy pravouglog trougla čije su katete R i h (slika 10.14.a.). Primenom druge Guldinove teoreme zapremina kupe je*

$$V = S_{\Delta OAB} \cdot x_{T_1} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}R \cdot h \cdot \frac{R}{3} \cdot 2\pi = \frac{R^2\pi h}{3}\cdot$$

Koordinata težišta kupe određena je izrazom (10.39)

$$y_C = \frac{\int_V y dV}{V}\cdot$$

Iz sličnosti trouglova OAB i EDB (slika 10.14.a.) sledi



10.14.a.

$$\frac{r}{R} = \frac{h-y}{h},$$

pa se dobija da je

$$\int_V y dV = \int_0^h \frac{R^2\pi}{h^2}(h^2 y - 2hy^2 + y^3)dy = \frac{R^2 h^2 \pi}{12}\cdot$$

Tada je y- koordinata težišta C kupe data sa

$$y_C = \frac{R^2 h^2 \pi / 12}{R^2 h \pi / 3} = \frac{h}{4}\cdot$$