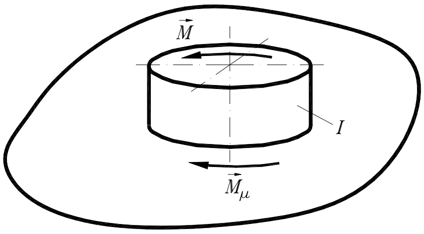
9.6. Trenje obrtanja

Iz iskustva je poznato da se telo koje se u realnim uslovima nalazi na površini nekog drugog tela, može obrnuti oko ose koja je upravna na zajedničku tangencijalnu ravan, ako se savlada otpor koji se javlja u dodirnim tačkama tela (*sl.125.*).



sl.125.

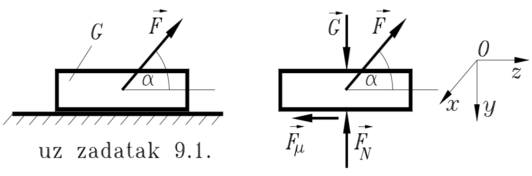
Dejstvu sprega aktivnih sila momenta $\vec{M}$, koji teži da obrne telo *I* na opisani način, suprotstavlja se spreg sila trenja momenta $\vec{M}_\mu$, na mestu dodira sa drugim telom. Eksperimenti pokazuju da se posmatrano telo neće pomeriti sve dok intenzitet momenta *M* ne bude veći od intenziteta momenta koji odgovara graničnoj ravnoteži tela. Dakle, porast momenta sprega aktivnih sila *M* prati i porast momenta sprega sila trenja M_μ, tako da u stanju granične ravnoteže važi

$$M = M_\mu = M_\mu^{gr} = k_0 F_N, \qquad (9.50)$$

a pri tome je k_0-<u>koeficijent trenja obrtanja</u>. Treba zapaziti da koeficijent trenja obrtanja ima dimenziju dužine.

Zadaci

<u>Zadatak 9.1.</u> Telo, zanemarljivih dimenzija, težine $\vec{G}$, nalazi se na hrapavoj horizontalnoj podlozi. Koeficijent trenja klizanja između tela i podloge je μ. Odrediti ugao α pod kojim treba da deluje sila $\vec{F}$ tako da pri njenom najmanjem intenzitetu dođe do pokretanja tela.



9.1.a.

Rešenje: *Na telo deluje ravan sistem sučeljnih sila dat na slici 9.1.a.. Analitički uslovi ravnoteže ovog sistema sila su*

$$\sum Z_i = 0; \qquad F\cos\alpha - F_\mu = 0,$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -F_N + G - F\sin\alpha = 0.$$

Uzimajući u obzir relaciju (9.4) tj. $F_\mu = \mu F_N$, *iz prethodnih jednačina dobija se*

$$F = \frac{\mu G}{cos\alpha + \mu sin\alpha}.$$

Ekstremni intenzitet sila $\vec{F}$ *ima za ugao* α *određen relacijom*

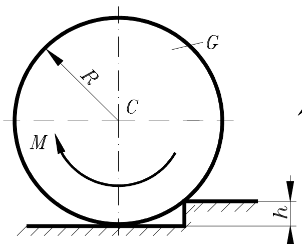
$$\frac{dF}{d\alpha} = -\mu G \frac{-sin\alpha + \mu cos\alpha}{(cos\alpha + \mu sin\alpha)^2} = 0,$$

odakle se dobija da je $tg\alpha = \mu$. *Kako je*

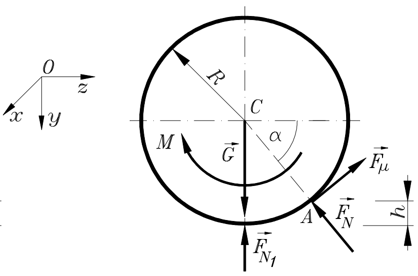
$$\frac{d^2F}{d\alpha^2} = \mu G \frac{(cos\alpha + \mu sin\alpha)^2 + 2(-sin\alpha + \mu cos\alpha)^2}{(cos\alpha + \mu sin\alpha)^3},$$

i kako važi da je $\left.\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right|_{\mu = tg\alpha} > 0$, *zaključuje se da za* $tg\alpha = \mu$ *sila* $\vec{F}$ *ima najmanji intenzitet.*

Zadatak 9.2. Homogeni točak, poluprečnika $R = 0,6$ i težine $G = 0,5$, kreće se po glatkoj horizontalnoj podlozi pod dejstvom sprega sila intenziteta momenta *M*. U toku kretanja točak nailazi na prepreku visine $h = 0,08$. Odrediti intenzitet momenta *M* tako da točak pređe preko prepreke i najmanji koeficijent trenja klizanja između točka i prepreke tako da točak pri prelasku ne proklizava.



uz zadatak 9.2.



9.2.a.

Rešenje: *Točak oslobođen veza prikazan je na slici 9.2.a.. Da bi točak prešao preko prepreke, potrebno je da na njega deluje spreg sila čiji moment ima intenzitet koji je veći ili jednak momentu koji zadovoljava relaciju*

$$\sum M_{Ax} = -M + GRcos\alpha - F_{N_1} Rcos\alpha = 0.$$

U trenutku prelaska točka preko prepreke važi $F_{N_1} = 0$, *pa se za*

$$sin\alpha = \frac{R-h}{R} = 0,87, \qquad cos\alpha = 0,5,$$

dobija da je

$$M = GR\cos\alpha = 0{,}15 \cdot$$

Primenjujući drugi oblik uslova ravnoteže za ravan sistem sila koji deluje na točak, preostale dve jednačine imaju oblik

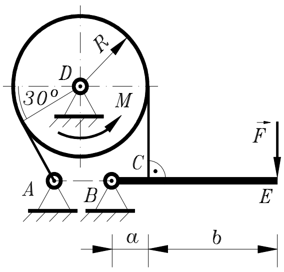
$$\sum M_{Cx} = 0; \qquad -M + F_\mu R = 0 \,,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad G - F_\mu \cos\alpha - F_N \sin\alpha = 0 \cdot$$

Iz ovih jednačina, zamenom izračunatog momenta, i uzimajući u obzir da važi $F_\mu = \mu F_N$, *mogu se odrediti nepoznate* F_N *i* μ, *pa je*

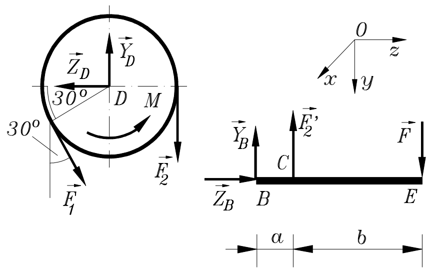
$$\mu = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0{,}57 \cdot$$

Imajući u vidu da je posmatran granični uslov ravnoteže, može se zaključiti da je dobijeni koeficijent trenja klizanja najmanji pri kome ne dolazi do proklizavanja točka.

Zadatak 9.3. Na točak, remene kočnice, poluprečnika *R*, deluje spreg sila intenziteta momenta *M*. Odrediti najmanji intenzitet sile $\vec{F}$ potreban za održavanje ravnoteže sistema tela kao i reakciju u osloncu *D*. Koeficijent trenja klizanja između remena i



uz zadatak 9.3.



9.3.a.

točka je μ.

Rešenje: *Točak i štap BE, oslobođeni veza, prikazani su na slici 9.3.a.. Analitički uslovi ravnoteže sistema sila i spregova koji deluju na točak su*

$$\sum Z_i = 0; \qquad -Z_D + F_1 \sin 30^o = 0 \,,$$
$$\sum Y_i = 0; \qquad -Y_D + F_2 + F_1 \cos 30^o = 0 \,,$$
$$\sum M_{Dx} = 0; \qquad -F_2 R + M + F_1 R = 0 \,.$$

Treba imati u vidu da su intenziteti F_1 *i* F_2 *povezani relacijom (9.30), tj. da u ovom slučaju važi*

$$F_2 = F_1 e^{\frac{7\pi}{6}\mu}.$$

Da bi sila $\vec{F}$ bila određena, dovoljno je postaviti uslov ravnoteže u obliku momentne jednačine za tačku B štapa BE. Tada važi da je

$$\sum M_{Bx} = -F(a+b) + F_2 a = 0\,.$$

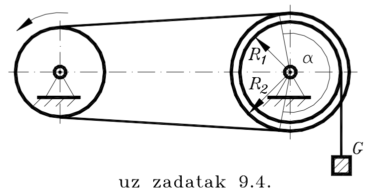
Druge dve jednačine iz analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na štap BE nije potrebno pisati jer se iz njih određuju reakcije oslonca B, a one se ne traže ovim zadatkom. Rešavanjem prethodnih pet jednačina, dobija se

$$F = \frac{Ma}{R(a+b)(1-e^{-\frac{7\pi}{6}\mu})}; \qquad F_2 = \frac{M}{R(1-e^{-\frac{7\pi}{6}\mu})}; \qquad F_1 = \frac{Me^{-\frac{7\pi}{6}\mu}}{R(1-e^{-\frac{7\pi}{6}\mu})};$$

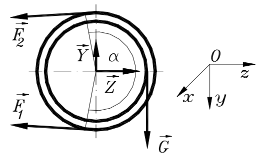
$$Z_D = \frac{a+b}{2a} F e^{-\frac{7\pi}{6}\mu}; \qquad Y_D = \frac{a+b}{2a} F(2+\sqrt{3}e^{-\frac{7\pi}{6}\mu})\cdot$$

Intenzitet sile $\vec{F}$ određen na ovaj način je najmanji pri kom se dati sistem nalazi u ravnoteži.

Zadatak 9.4. Za remeni prenosnik koji služi za podizanje tereta težine $\vec{G}$, odrediti sile u delovima remena između remenica. Koeficijent trenja klizanja između remenice i remena je μ, a ugao naleganja remena je α.



uz zadatak 9.4.



9.4.a.

Rešenje: *Remenica, koja služi za podizanje tereta, oslobođena veza, prikazana je na slici 9.4.a..*

Jedan od analitičkih uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na remenicu je

$$\sum M_{O_2x} = 0; \qquad F_2 R_2 - F_1 R_2 - G R_1 = 0\,.$$

Ostala dva uslova ravnoteže nije neophodno pisati jer oni služe za određivanje reakcije zgloba O_2, što se zadatkom ne traži. Kako je gornji deo remena više opterećen, primenjujući relaciju (9.30), može se pisati

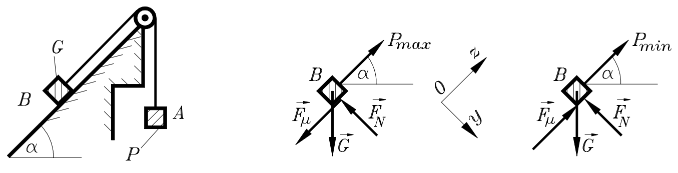
$$F_2 = F_1 e^{\mu\alpha},$$

pa se rešavanjem prethodnih dveju jednačina dobija da su sile u gornjem i donjem delu remena određene sa

$$F_2 = G\frac{R_1}{R_2}\frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha}-1} \quad i \quad F_1 = G\frac{R_1}{R_2}\frac{1}{e^{\mu\alpha}-1}.$$

Ove sile su određene za slučaj ravnoteže ili ravnomernog kretanja tereta naviše.

Zadatak 9.5. Odrediti težinu $\vec{P}$ tereta A, koji drži u ravnoteži, na hrapavoj strmoj ravni, teret B težine $\vec{G}$. Strma ravan je nagnuta pod uglom α prema horizontali. Koeficijent trenja klizanja između tereta B i strme ravni je $\mu = tg\varphi$.



uz zadatak 9.5. 9.5.a. 9.5.b.

Rešenje: *Težina P tereta A, kojom se teret B održava u položaju ravnoteže, nije jednoznačno određena. Naime, ako je potrebno odrediti najveću dozvoljenu težinu P (P_{max}), tako da teret B bude u ravnoteži, tada je sila trenja klizanja usmerena niz strmu ravan jer teret B teži da se pomeri uz strmu ravan (slika 9.5.a.). U slučaju kada se određuje najmanja težina P tereta B (P_{min}), sila trenja klizanja je usmerena uz strmu ravan (suprotno mogućem kretanju tereta B), kao što je na slici 9.5.b. prikazano. U oba slučaja, na teret B deluje ravan sistem sučeljnih sila, pa su uslovi ravnoteže za teret B na slici 9.5.a.,*

$$\sum Z_i = 0; \qquad P_{max} - F_\mu - G sin\alpha = 0, \tag{a}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad G cos\alpha - F_N = 0, \tag{b}$$

a u slučaju sa slike 9.5.b. uslovi ravnoteže su

$$\sum Z_i = 0; \qquad P_{min} + F_\mu - G sin\alpha = 0, \tag{c}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad G cos\alpha - F_N = 0. \tag{d}$$

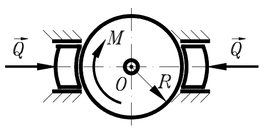
Uzimajući u obzir relaciju $F_\mu = \mu F_N = tg\varphi F_N$ *i da su jednačine (b) i (d) identične, iz prethodnog sistema jednačina se mogu odrediti nepoznate* P_{max}, P_{min} *i* F_N, *tj.*

$$F_N = G cos\alpha, \qquad P_{max} = \frac{G sin(\alpha+\varphi)}{cos\alpha}, \qquad P_{min} = \frac{G sin(\alpha-\varphi)}{cos\alpha}.$$

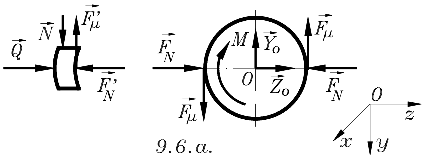
Dakle, teret B će mirovati na strmoj ravni ako težina tereta A zadovoljava sledeću relaciju

$$P_{min} \le P \le P_{max}.$$

Zadatak 9.6. Točak poluprečnika $R = 0{,}25$, koji može da se obrće oko vertikalne ose koja prolazi kroz tačku *O*, opterećen je spregom sila čiji je moment intenziteta $M = 1$. Ako je koeficijent trenja klizanja između točka i kočione papuče $\mu = 0{,}25$, odrediti intenzitet sile $\vec{Q}$ kojom treba pritisnuti kočione papuče, koje se kreću duž glatkih vođica, na točak, da bi on mirovao.



uz zadatak 9.6.



9.6.a.

Rešenje: *Jedna od kočionih papuča, odnosno točak, oslobođeni veza, prikazani su na slici 9.6.a.. Sila trenja klizanja suprotnog je smera od smera mogućeg obrtanja točka pod dejstvom sprega sila intenziteta momenta M. Iz jednog uslova ravnoteže ravnog sistema sila koje deluje na papuču dobija se*

$$\sum Z_i = 0; \qquad\qquad Q - F_N = 0,$$

odnosno $F_N = Q$. *Za određivanje normalne komponente reakcije veze dovoljno je, zbog simetričnosti, razmatrati samo jednu od papuča.*

Da se točak ne bi obrtao, dovoljno je postaviti uslov ravnoteže

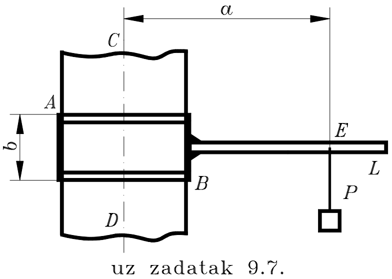
$$\sum M_{Ox} = 0; \qquad\qquad -M + 2F_\mu R = 0,$$

dok se druga dva uslova ravnoteže koriste za određivanje reakcija ležišta točka $\vec{Z}_o$ *i* $\vec{Y}_o$, *što se ne traži ovim zadatkom. Koristeći vezu* $F_\mu = \mu F_N$, *iz prethodnih jednačina se dobija da je*

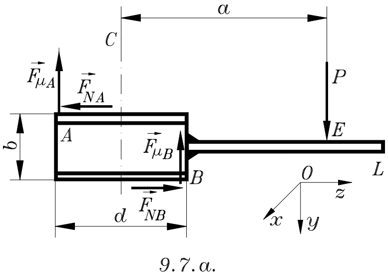
$$Q = \frac{M}{2\mu R},$$

odnosno zamenom datih veličina intenzitet potrebne kočione sile je $Q = 8$.

Zadatak 9.7. Horizontalna greda *BL* kruto je spojena sa tankim prstenovima *A* i *B*, koji obuhvataju vertikalni cilindrični stub *CD*. Za gredu je u tački *E* ($\overline{CE} = a$) obešen teret težine $\vec{P}$. Odrediti rastojanje *a* tako da se prstenovi ne kreću po stubu, ako je koeficijent trenja klizanja između prstenova i stuba $\mu = 0{,}1$, a razmak između prstenova *A* i *B* je $b = 0{,}02$. Širinu prstenova zanemariti.



uz zadatak 9.7.



9.7.a.

Rešenje: *Greda sa prstenovima, koja pod opterećenjem $\vec{P}$ teži da krene nadole, izložena je dejstvu sistema sila kao što je pokazano na slici 9.7.a.. Uslovi ravnoteže ovakvog sistema sila su*

$$\sum Z_i = 0; \qquad F_{NB} - F_{NA} = 0, \qquad (a)$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -F_{\mu A} - F_{\mu B} + P = 0, \qquad (b)$$

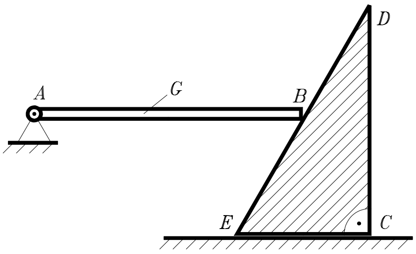
$$\sum M_{Bx} = 0; \qquad F_{NA}b - F_{\mu A}d - P(a - \frac{d}{2}) = 0 \cdot \qquad (c)$$

U jednačini (c) uvedena je pomoćna veličina d (prečnik stuba) pa se rešavanjem prethodnog sistema jednačina uz korišćenje uslova da je u graničnom položaju ravnoteže $F_{\mu A} = \mu F_{NA}$ i $F_{\mu B} = \mu F_{NB}$, dobija da je

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{P}{2\mu}, \qquad a = \frac{b}{2\mu} \cdot$$

Iz ovih rešenja se zaključuje da rastojanje a ne zavisi od težine P. Zamenom zadatih vrednosti dobija se da je $a = 0{,}1$ što znači da će greda biti u ravnoteži ako je teret P obešen na bilo kom rastojanju $a \geq 0{,}1$.

__**Zadatak 9.8.**__ Homogeni horizontalni štap *AB* težine $\vec{G}$ vezan je zglobno svojim krajem *A* za nepokretni oslonac, a krajem *B* je oslonjen na homogenu prizmu, težine *Q*, čiji poprečni presek je pravougli trougao *CDE* ($\angle E = 60^o$), pri čemu je $\overline{EB} = \overline{BD}$. Koeficijent trenja klizanja između prizme i podloge je $\mu = \sqrt{3}/3$. Odrediti težinu štapa $\vec{G}$ tako da prizma i štap miruju u položaju prikazanom na slici.

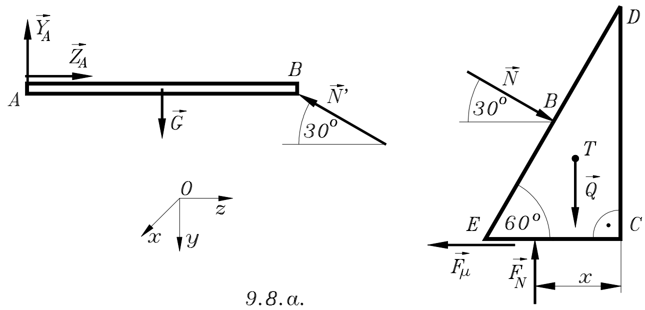


uz zadatak 9.8.

Rešenje: *Pod dejstvom težine štapa prizma CDE teži da se pomeri udesno pa je sila trenja klizanja usmerena suprotno od mogućeg pomeranja. Štap i prizma oslobođeni veza dati su na slici 9.8.a..*

Ako se pretpostavi da je

$\overline{EB} = \overline{BD} = a$, $\overline{EC} = a$ i $\overline{DC} = a\sqrt{3}/2$, *uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na prizmu su*



9.8.a.

$$\sum Z_i = 0; \qquad -F_\mu + Ncos30^o = 0, \tag{a}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -F_N + Nsin30^o + Q = 0, \tag{b}$$

$$\sum M_{Cx} = 0; \quad -Ncos30^o asin60^o + Nsin30^o asin30^o - F_N x + Q\frac{a}{3} = 0 \cdot \tag{c}$$

Kako je potrebno odrediti samo težinu $\vec{G}$, *tada se za štap AB može postaviti samo jedan uslov ravnoteže*

$$\sum M_{Ax} = 0; \qquad -G\frac{\overline{AB}}{2} + Nsin30^o\,\overline{AB} = 0,$$

odakle se dobija da je

$$N = G. \tag{d}$$

Koristeći jednačine (b) i (d) dobija se da je

$$F_N = \frac{N}{2} + Q = \frac{G}{2} + Q \cdot \tag{e}$$

Ravnoteža posmatranog sistema tela biće narušena ako dođe do proklizavanja prizme po podlozi, ili do njenog prevrtanja. Dozvoljena težina $\vec{G}$, *kada ne dolazi do proklizavanja, dobija se iz jednačine (a). Koristeći uslov* $F_\mu = \mu F_N$, *u graničnom položaju ravnoteže, kao i jednačine (d) i (e), dobija se*

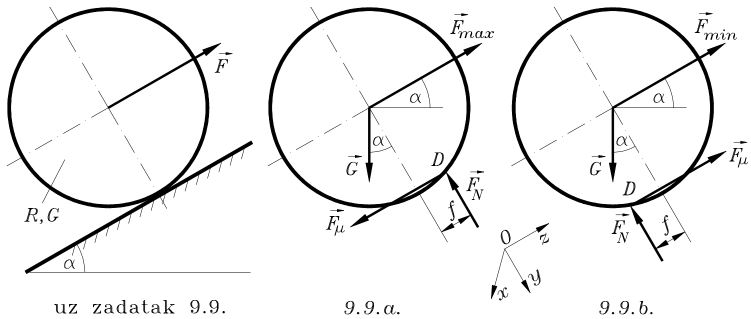
$$-\mu(\frac{G}{2} + Q) + G\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; G = Q. \tag{f}$$

Najveća težina $\vec{G}$, *koja neće izazvati prevrtanje prizme, treba da bude određena iz jednačine (c) za slučaj prevrtanja kada je* $x = 0$. *Odatle se, korišćenjem (d) i (e), dobija*

$$G = \frac{2}{3}Q \cdot \tag{e}$$

Kako ne sme doći ni do proklizavanja ni do prevrtanja prizme, na osnovu jednakosti (f) i (e) se zaključuje da je manja težina $\vec{G}$ potrebna za prevrtanje nego za proklizavanje prizme. Dakle, sistem tela će ostati u ravnoteži ako je $G \leq \frac{2}{3}Q$.

Zadatak 9.9. Točak, poluprečnika R i težine $\vec{G}$, održava sila $\vec{F}$ u ravnoteži na strmoj ravni nagibnog ugla α. Koeficijent trenja kotrljanja između točka i podloge je f. Odrediti intenzitet sile $\vec{F}$ tako da točak miruje.



uz zadatak 9.9. 9.9.a. 9.9.b.

Rešenje: *Intenzitet sile $\vec{F}$, koja održava točak u stanju mirovanja, nije jednoznačno određen. Najveći intenzitet sile $\vec{F}$, pri kome je točak u stanju mirovanja, teži da pokrene točak uz strmu ravan tako da je normalna reakcija veze pomerena za f uz strmu ravan u odnosu na osu točka (slika 9.9.a.). U slučaju najmanjeg intenziteta sile $\vec{F}$ javlja se slučaj prikazan na slici 9.9.b.. Uslovi ravnoteže točka na slici 9.9.a. su*

$$\sum Z_i = 0; \qquad F_{\max} - G\sin\alpha - F_{\mu} = 0, \tag{a}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad -F_N + G\cos\alpha = 0, \tag{b}$$

$$\sum M_{Dx} = 0; \qquad G\sin\alpha\, R + G\cos\alpha\, f - F_{max} R = 0. \tag{c}$$

Jednačinom (c) određen je najveći intenzitet sile $\vec{F}$, tj.

$$F_{\max} = G(\sin\alpha + \frac{f}{R}\cos\alpha), \tag{d}$$

dok jednačine (a) i (b) određuju nepoznate F_N i F_μ. Treba naglasiti da kod kotrljanja bez klizanja ne važi relacija $F_\mu = \mu F_N$ i smer sile $\vec{F}_\mu$ se pretpostavlja, a tačnost pretpostavke se proverava njenim izračunavanjem.

U cilju određivanja najmanjeg intenziteta sile $\vec{F}$, dovoljno je postaviti samo jedan uslov ravnoteže točka prikazanog na slici 9.9.b., tj.

$$\sum M_{Dx} = 0; \qquad G\sin\alpha\, R - G\cos\alpha\, f - F_{max} R = 0. \tag{e}$$

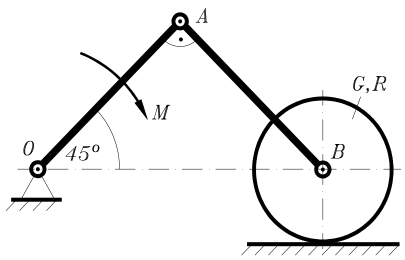
Iz jednačine (e) se dobija da je

$$F_{\min} = G(\sin\alpha - \frac{f}{R}\cos\alpha), \tag{f}$$

pa se, koristeći (d) i (f) može pisati

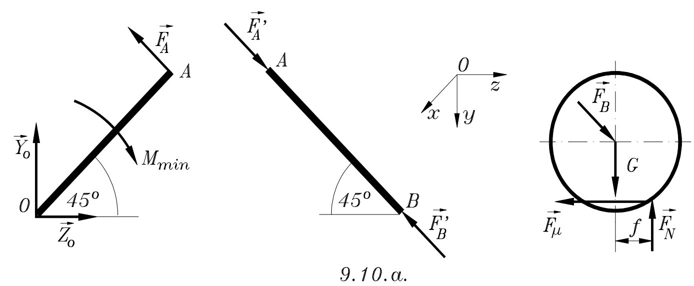
$$G(\sin\alpha - \frac{f}{R}\cos\alpha) \le F \le G(\sin\alpha + \frac{f}{R}\cos\alpha).$$

Zadatak 9.10. Odrediti najmanji intenzitet momenta $M_{\min}$ kojim treba delovati na štap OA da bi točak B započeo kretanje. Točak je težine $\vec{G}$ i poluprečnika R a koeficijent trenja kotrljanja između točka i podloge je f. Težine štapova OA i AB ($\overline{OA} = \overline{AB} = 2R\sqrt{2}$) zanemariti.



uz zadatak 9.10.

Rešenje: *Na točak i štapove deluju sistemi sila prikazani na slici 9.10.a. Kako nije neophodno određivati reakcije zgloba O, koristi se samo jedan od uslova ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na štap OA, tj.*



9.10.a.

$$\sum M_{Ox} = 0; \qquad -M_{\min} + F_A\overline{OA} = 0. \tag{a}$$

Uslov ravnoteže sistema kolinearnih sila koji deluje na štap AB je

$$\sum Z_i = 0; \qquad F_A\frac{\sqrt{2}}{2} - F_B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \tag{b}$$

dok su uslovi ravnoteže ravnog sistema sila koji deluje na točak

$$\sum Z_i = 0; \qquad F_B\frac{\sqrt{2}}{2} - F_\mu = 0, \tag{c}$$

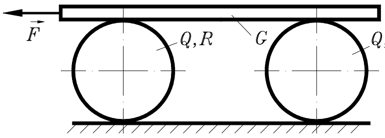
$$\sum Y_i = 0; \qquad F_B\frac{\sqrt{2}}{2} + G - F_N = 0, \tag{d}$$

$$\sum M_{Bx} = 0; \qquad F_N f - F_\mu R = 0. \tag{e}$$

Iz sistema od pet jednačina (a)-(e), mogu se odrediti nepoznate $M_{\min}$, F_A, F_B, F_N *i* F_μ, *odakle se dobija da je*

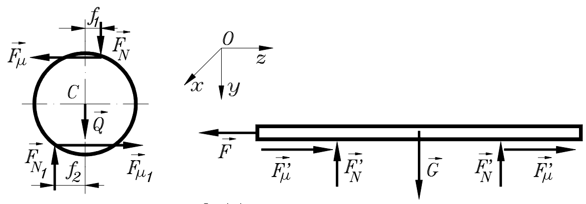
$$M_{\min} = \frac{4fGR}{R-f}.$$

Zadatak 9.11. Homogena ploča težine $\vec{G}$ oslanja se na dva valjka (svaki je težine $\vec{Q}$ i poluprečnika R), koji se mogu kretati po horizontalnoj podlozi. Odrediti intenzitet sile $\vec{F}$ koja je potrebna za pokretanje ploče, kada je težina ploče simetrično raspoređena na valjke, ako je koeficijent trenja kotrljanja između valjaka i ploče f_1, a između valjaka i podloge f_2.



uz zadatak 9.11.

Rešenje: *Kako su valjci opterećeni na isti način, dovoljno je posmatrati samo jedan valjak. Sistemi sila koji deluju na valjke i na ploču dati su na slici 9.11.a..*



9.11.a.

Uslovi ravnoteže, za ravan sistem sila koji deluje na jedan od valjaka, imaju oblik

$$\sum Z_i = 0; \qquad F_{\mu_1} - F_\mu = 0, \qquad (a)$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad F_N + Q - F_{N_1} = 0, \qquad (b)$$

$$\sum M_{Cx} = 0; \qquad F_\mu R + F_{\mu_1} R - F_N f_1 - F_{N_1} f_2 = 0. \qquad (c)$$

Uslovi ravnoteže sistema sila koji deluju na ploču su oblika

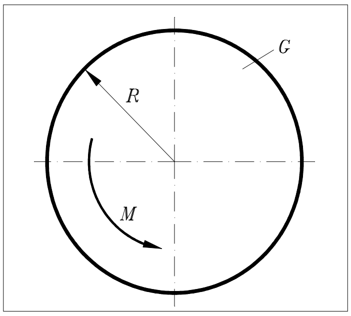
$$\sum Z_i = 0; \qquad -F + 2F_\mu = 0, \qquad (d)$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad G - 2F_N = 0. \qquad (e)$$

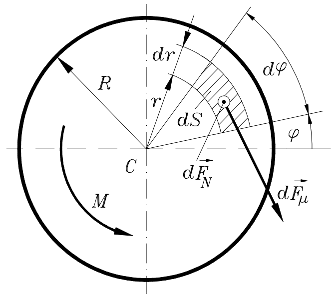
Iz sistema jednačina (a)-(e) mogu se odrediti nepoznate F_{μ_1}, F_μ, F_{N_1}, F_N *i* F, *pa se rešavanjem dobija*

$$F = \frac{1}{2R}\left[Gf_1 + (2Q+G)f_2\right].$$

Zadatak 9.12. Homogeni valjak poluprečnika R i težine $\vec{G}$ nalazi se, oslonjen svojom osnovom, na ravnoj horizontalnoj hrapavoj podlozi. Odrediti intenzitet momenta sprega sila koji može da obrne valjak oko vertikalne ose koja prolazi kroz centar valjka, ako je koeficijent trenja između valjka i podloge μ.



uz zadatak 9.12.



9.12.a.

Rešenje: *Usled delovanja sprega sila intenziteta momenta M i postojanja trenja između valjka i podloge, sila trenja koja deluje na elementarni delić valjka na dodirnoj površini valjka i podloge, kako je prikazano na slici 9.12.a., određena je izrazom*

$$dF_\mu = \mu dF_N ,$$

pri čemu se elementarna normalna reakcija veze može izračunati kao

$$dF_N = \gamma dS ,$$

gde γ *predstavlja težinu valjka po jedinici površine njegove osnove, tj.* $\gamma S = \gamma R^2 \pi = G$. *Kako je elementarna površina osnove valjka (slika 9.12.a.) data sa*

$$dS = r d\varphi dr ,$$

elementarna sila trenja je

$$dF_\mu = \mu\gamma r d\varphi dr \cdot$$

Intenzitet momenta sprega sila trenja se sada može izraziti kao

$$M_\mu = \int_S r dF_\mu = \int_0^R \int_0^{2\pi} \mu\gamma r^2 dr d\varphi = \mu\gamma \int_0^R r^2 \varphi\Big|_0^{2\pi} dr = \mu \frac{G}{R^2\pi} 2\pi \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\mu G R \cdot$$