Numerička integracija - Zadacu za vežbu

Primer 1

Odrediti A_0, A_1 i A_2 tako da kvadraturna formula

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1),$$

ima maksimalni algebraski stepen tačnosti.

Rešenje

Kako imamo tri nepoznate težine, možemo postići algebraski stepen tačnosti 2. Odavde dobijamo sistem jednačina:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} = A_0 + A_1 + A_2,$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx = 0 = A_0(-1) + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1,$$
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 - \frac{\pi}{2} = A_0(-1)^2 + A_1 \cdot 0^2 + A_2 \cdot 1^2.$$

Rešenje linearnog sistema je:

$$(A_0, A_1, A_2) = \left(1 - \frac{\pi}{4}, \pi - 2, 1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Primer 2

Izračunati integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)\, dx$$

primenom trapezne i Simpsonove formule sa korakom $h = 0{,}125$ i proceniti grešku integracije za obe formule.

Rešenje

Trapezna i Simpsonova formula daju:

$$T(0,125) = \frac{0{,}125}{2} \left(f(0) + f(0{,}5) + 2(f(0{,}125) + f(0{,}25) + f(0{,}375))\right) = 0{,}3142087183$$

$$S(0,125) = \frac{0,125}{3}\left(f(0) + f(0,5) + 4f(0,125) + 2f(0,25) + 4f(0,375)\right) = 0,3183125267$$

Ocene greške za trapeznu i Simpsonovu metodu s ovim korakom su:

$$R_T \leq (b-a)\frac{M_2}{12}h^2, \quad R_S \leq \frac{b-a}{180}M_4 h^4$$

Kako su odgovarajući izvodi:

$$f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x), \quad f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin(\pi x),$$

dobijamo da su:

$$\max_{x\in[0,0.5]} |f''(x)| = |f''(0,5)| \approx 9,8696 \leq 9,9 = M_2$$

$$\max_{x\in[0,0.5]} |f^{(4)}(x)| = f^{(4)}(0,5) \approx 97,409 \leq 97,5 = M_4$$

pa je:

$$R_T \leq \frac{0,5}{12} \cdot 9,9 \cdot (0,125)^2 = 6,4 \cdot 10^{-3}$$

$$R_S \leq \frac{0,5}{180} \cdot 97,5 \cdot (0,125)^4 = 6,6 \cdot 10^{-5}$$

Primer 3

Izračunati integral Simpsonovom kvadraturnom formulom sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{x + \cos x}$$

Rešenje

Uzmimo neparan broj čvorova,npr. $n = 5$. Računamo sa 5 decimala zbog ocene greške. Grešku ćemo oceniti Rungeovom ocenom. Tražimo vrednost integrala sa korakom h i sa duplo manjim korakom.

Prvi korak:

$$h = \frac{\pi}{4}$$

$$I_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3\cdot 4}\left(1,46694 + 4\cdot 1,27641 + 2\cdot 0,63662\right) = 2,05403$$

Drugi korak:

$$h = \frac{\pi}{8}$$

$$I_{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{3\cdot 8}\left(1,46694 + 4\cdot 2,58077 + 2\cdot(1,27641 + 0,63662)\right) = 2,04414$$

Ocena greške:

$$|I(f) - I_{\frac{\pi}{8}}(f)| \approx \left|\frac{I_{\frac{\pi}{8}}(f) - I_{\frac{\pi}{4}}(f)}{2^4 - 1}\right| = \frac{|2,04414 - 2,05403|}{15} \approx 0,00066 > 10^{-4}$$

Treći korak:
Kako je greška veća od tražene, ponovo ćemo poloviti interval i formirati novu tablicu:

$$h = \frac{\pi}{16}$$

$$I_{\frac{\pi}{16}} = \frac{\pi}{3 \cdot 16} (1{,}46694 + 4 \cdot 5{,}190621 + 2 \cdot (2{,}58077 + 1{,}91303)) = 2{,}04293$$

Ocenimo grešku:

$$|I(f) - I_{\frac{\pi}{16}}(f)| \approx \left| \frac{I_{\frac{\pi}{16}}(f) - I_{\frac{\pi}{8}}(f)}{2^4 - 1} \right| = \frac{|2{,}04315 - 2{,}04293|}{15} = 0{,}0000147 < 10^{-4}$$

Dakle, traženo rešenje je $\boxed{I = 2{,}0429}$

Primer 4

Koristeći Simpsonovu formulu, sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ odrediti vrednost izraza

$$\int_0^1 \frac{1}{3+x} dx.$$

Rešenje

$I \approx 0.746855379790987.$
