Neke Njutnove sile

Njutnova gravitaciona sila. – Njutnova gravitaciona sila između dve materijalne tačke M_1 i M_2 masa m_1 i m_2, respektivno, (dva tela koja se mogu predstaviti materijalnim tačkama odgovarajućih masa) predstavlja silu uzajamnog privlačenja te dve tačke. Ako je $\vec{F}_{12}$ sila kojom tačka M_2 privlači tačku M_1, a $\vec{F}_{21}$ sila kojom tačka M_1 privlači tačku M_2, onda važi:

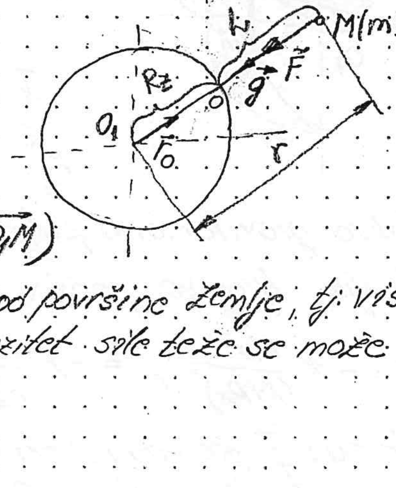
$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ i $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{k m_1 m_2}{r^2}$,

gde je:
$k = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$ – univerzalna gravitaciona konstanta

i $r = \overline{M_1M_2}$ – trenutno rastojanje između tačaka M_1 i M_2.

Sila Zemljine teže. – Sila Zemljine teže predstavlja silu kojom Zemlja privlači sve materijalne tačke, (pa samim tim i tela) koje se nalaze na njoj ili ~~u njenoj ili~~ u njenoj okolini. Ova sila je po svojoj prirodi Njutnova gravitaciona sila koja deluje između Zemlje i posmatrane materijalne tačke M mase m (tj. tela koje se može predstaviti tom materijalnom tačkom). Međutim, pošto posmatrana materijalna tačka ~~ima masu koja~~ ima zanemarljivo malu masu m u odnosu na masu Zemlje, M_Z, to se umesto termina „uzajamno privlače tačke M i Zemlje" koristi termin „Zemlja privlači materijalnu tačku M" ili „na tačku M deluje sila Zemljine teže." Sila Zemljine teže, tj. sila teže $\vec{F}$ koja deluje na mat. tačku M mase m, a koja se nalazi nalaži na rastojanju $r = \overline{O_1M}$ od centra Zemlje O_1 je sila koja ima pravac prave O_1M, smer ka centru Zemlje, a intezitet joj iznose:

$F = |\vec{F}| = k\frac{mM_Z}{r^2}$,



tako da se vektor ove sile može dati u obliku:

$\vec{F} = -F\vec{r}_0$,

gde je $\vec{r}_0$ jedinični vektor pravca O_1M. ($\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{r} = \overline{O_1M}$)

Ako se sa $h = \overline{OM}$ označi normalno rastojanje tačke M od površine Zemlje, tj. visina na kojoj se nalazi tačka M iznad površine Zemlje, intezitet sile teže se može predstaviti i u obliku:

$$F = k\frac{M_Z}{R_Z^2}\frac{R_Z^2}{(R_Z+h)^2}m \Rightarrow \boxed{F} = mg\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_Z}\right)^2},$$

gde je:

$g = k\frac{M_Z}{R_Z^2}$ – ubrzanje Zemljine teže koje iznosi: $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.

Kada je $h \ll R_Z$ intezitet sile teže koja deluje na tačku M je konstantan, tj.

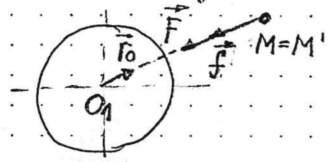
ne zavisi od položaja mat. tačke M u odnosu na centar (površ) Zemlje i iznosi:

$\boxed{F = G = mg}$, tj. $\vec{F} = \vec{G} = m\vec{g}$, gde je $\vec{g}$ - vektor ubrzanja Zemljine teže

Pošto mat. tačka M trpi dejstvo sile Zemljine teže u svakoj tački prostora oko Zemlje, uvodi se pojam <u>gravitacionog polja Zemlje</u>. Posredstvom ovog polja Zemlja privlači materijalnu tačku M silom $\vec{F}$. Gravitaciono polje u prostoru oko Zemlje postoji i kada se u njemu ne nalaze materijalni objekti. <u>Jačina gravitacionog polja Zemlje</u> $\vec{f}$ u tački M' prostora oko Zemlje koja se nalazi na rastojanju r od centra O_1 Zemlje je vektorska veličina i predstavlja silu Zemljine teže koja deluje na materijalnu tačke koja se nalazi u tački prostora M', a jedinične je mase ($m=1$):

$$\vec{f} = -k\frac{M_Z}{r^2}\vec{r}_0,$$

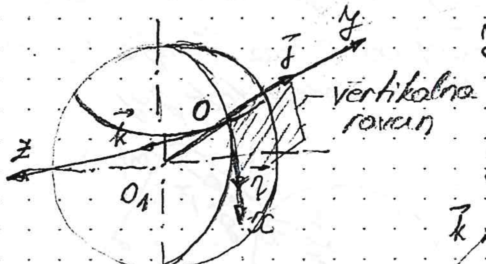
Sila teže koja deluje na materijalnu tačku M mase m, a nalazi se u tački M' gravitacionog polja Zemlje se sada može dati u obliku:

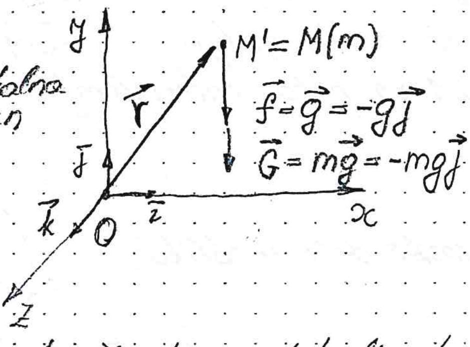


$$\vec{F} = m\vec{f}$$

Pošto se jačina gravitacionog polja $\vec{f}$ Zemlje menja i po pravcu i po intezitetu od tačke do tačke prostora, tj. $f = f(\vec{r})$, gravitaciono polje Zemlje je nehomogeno.

Ako su dimenzije prostora gravitacionog polja Zemlje u okolini tačke O na površi Zemlje dovoljno male tako da se površ Zemlje u okolini tačke O može smatrati ravnom, a visine tačaka uočenog prostora iznad Zemlje mnogo manje od poluprečnika Zemlje ($h \ll R_Z$), jačina gravitacionog polja Zemlje $\vec{f}$ u tom prostoru može se smatrati konstantnom vektorskom veličinom (veličinom koja se ne menja ni po intezitetu ni po pravcu od tačke do tačke polja).





(Jedinični vektor $\vec{r}_0$ pravca O_1M u uočenom prostor jednak je jediničnom vektoru $\vec{j}$ ($\vec{r}_0 \approx \vec{j}$) ose lokalne vertikale u tački O ose Oy koja sadrži tačke O i O_1)

Takvo gravitaciono polje Zemlje predstavlja <u>homogeno gravitaciono polje Zemlje</u>. Njegova jačina $\vec{f}$ je:

$$\vec{f} = -k\frac{M_Z}{(h+R_Z)^2}\vec{j} = -k\frac{M_Z}{R_Z^2}\overbrace{\frac{R_Z^2}{(R_Z+h)^2}}^{\approx 1}\vec{j} \Rightarrow \vec{f} \approx -g\vec{j}, \text{ tj. } \boxed{\vec{f} = \vec{g}}$$

gde su: $\vec{j}$ jedinični vektor vertikalne ose Oy u tački O na Zemlji koja prolazi centar Zemlje, ravan Oxy horizontalna ravan u toj tački i $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ ubrzanje sile Zemljine teže.

Sila Zemljine teže koja deluje na mat. tačku M mase m koja se nalazi u tački M' homogenog gravitacionog polja je konstantna i iznosi:

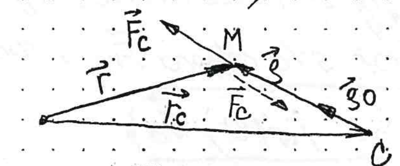
$\vec{G} = m\vec{f} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{G} = -mg\vec{j} \Rightarrow G_y = -|\vec{G}|\ ;\ G_y = -mg.$

Centralna sila. – Pod centralnom silom $\vec{F_c}$ naziva se sila čija napadna linija prolazi kroz tačku M na koju deluje i kroz tačku C koja predstavlja centar, tj. izvor, te sile.

Neka je položaj centra C sile u odnosu na nepokretan pol O poznat i određen vektorom $\vec{r_c} = \vec{OC}$. Ako je centar sile pokretan onda je poznat i zakon kretanja centra sile: $\vec{r_c} = \vec{r_c}(t)$. Zakon kretanja mat. tačke M, mase m na koju deluje sila $\vec{F_c}$ u odnosu na pol O je: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Vektor položaj ove tačke M u odnosu na centar sile C je:

$\vec{S} = \vec{CM}$ i $\vec{S} = \vec{r}(t) - \vec{r_c}(t)$

Napadna linija centralne sile $\vec{F_c}$ se u bilo kom trenutku t poklapa sa napadnom linijom vektora $\vec{S}$, tj. sila $\vec{F_c}$ je kolinearna sa jediničnim vektorom $\vec{S_0}$ pravca CM, pa važi:



$\vec{F_c} = F_{cs}\vec{S_0}$, gde je:

$\vec{S_0} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{\vec{S}}{CM}$

i $F_{cs} = \pm|\vec{F_c}| = \pm F_c$ $\begin{cases} \oplus, \vec{F_c} \text{ i } \vec{S_0}, \text{tj. } \vec{S}, \text{ istog smera, sila } \vec{F_c} \text{ odbojna} \\ \ominus, \vec{F_c} \text{ i } \vec{S_0}, \text{tj. } \vec{S}, \text{ suprotnog smera, sila } \vec{F_c} \text{ privlačna} \end{cases}$

Intezitet F_c centralne sile najčešće je funkcija rastojanja materijalne tačke M od centra sile, tj.: $F_c = F_c(S)$, gde je $S = |\vec{S}|$.

Primer centralne sile je privlačna sila Zemljine teže čiji je centar centar Zemlje (O_1) i koji se u mnogim problemima primenjene mehanike može smatrati nepokretnim. Intezitet ove sile je obrnuto proporcionalan kvadratu rastojanja tačke M od centra sile.

Poseban slučaj predstavljaju centralne sile čiji je intezitet upravo proporcionalan rastojanju tačke M od centra sile C: $F_c = K\,\overline{CM} = K\,S$, gde je $K\ [N/m]$ koeficijent proporcionalnosti ($K>0$). Primer ovakve sile je sila u linearnoj opruzi. Vektor centralne sile $\vec{F_c}$ u razmatranom slučaju je:

$\vec{F_c} = \pm F_c\vec{S_0} \Rightarrow \vec{F_c} = \pm K S\frac{\vec{S}}{S} \Rightarrow \vec{F_c} = \pm K\vec{S}$, tj.:

$\boxed{\vec{F_c} = \pm K\,\vec{CM}} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F_c} = K\,\vec{CM} \text{ — odbojna centralna sila} \\ \vec{F_c} = -K\,\vec{CM} = K\,\vec{MC} \text{ — privlačna centralna sila.} \end{cases}$

Ako se kretanje tačke M posmatra u odnosu na nepokretan Dekartov koordinatni sistem Oxyz, vektor $\vec{CM}$ u njemu je:

$\vec{CM} = (x(t) - x_c(t))\,\vec{i} + (y(t) - y_c(t))\,\vec{j} + (z(t) - z_c(t))\,\vec{k}$,

gde su: $x_c = x_c(t)$, $y_c = y_c(t)$ i $z_c = z_c(t)$ konačne jednačine kretanja centra sile u Oxyz,

i $x=x(t)$, $y=y(t)$ i $z=z(t)$ - konačne jednačine kretanja tačke M u Oxyz.
Centralna sila $\vec{F}_c$ u DKS Oxyz je:

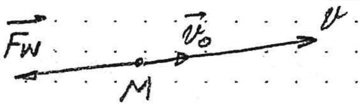
$$\boxed{\vec{F}_c = \pm K\overrightarrow{CM}} = \boxed{\pm K(x-x_c)\vec{i} \pm K(y-y_c)\vec{j} \pm K(z-z_c)\vec{k}},$$

tj. projekcije sile $\vec{F}_c$ na ose Ox, Oy i Oz, respektivno, su:

$F_{cx}=X_c=\pm K(x-x_c)$, $F_{cy}=Y_c=\pm K(y-y_c)$ i $F_{cz}=Z_c=\pm K(z-z_c)$.

<u>Sila otpore sredine.</u> - Sila otpora sredine $\vec{F}_W$ je sila kojom fluid, uključujući i vazduh deluje na mehanički objekat (tačku ili telo) koji se kreće u njemu. To je sila kojom se sredina suprotstavlja kretanju posmatranog mehaničkog objekta u njoj, a u svakoj tački tog mehaničkog objekta.

Sila otpora sredine $\vec{F}_W$ u tački M (tačka M može biti i tačka tela) ima, zbog napred rečenog, pravac brzine tačke $\vec{v}$, ali suprotan smer, dok njen intezitet $F_W=|\vec{F}_W|$ zavisi od inteziteta brzine $v=|\vec{v}|$ tačke i od svojstava same sredine u kojoj se tačka M kreće (gustine, viskoznosti, itd.). Zbog napred napred rečenog, vektor sile otpora $\vec{F}_W$ u tački M je:



$$\boxed{\vec{F}_W = -F_W(v)\,\vec{v}_0}$$

gde je $\vec{v}_0$ jedinični vektor pravca vektora brzine: $\vec{v}_0=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\vec{v}}{v}$

Ako je intezitet sile $\vec{F}_W$ proporcionalan intezitetu v brzine tačke:

$$\boxed{F_W = bv,}$$

gde je b koeficijent otpora sredine u kojoj se tačka M kreće, onda je vektor sile otpora sredine:

$$\vec{F}_W = -F_W\,\vec{v}_0 = -bv\cdot\frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_W = -b\vec{v}.}$$

U nepokretnom DKS Oxyz u odnosu na koji se posmatra kretanje tačke M, njena brzina je: $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}$, pa je sila otpora sile $\vec{F}_W$:

$$\boxed{\vec{F}_W = -b\vec{v}} = \boxed{(-b\dot{x})\vec{i} + (-b\dot{y})\vec{j} + (-b\dot{z})\vec{k}},$$

tj. njene projekcije na ose DKS Oxyz su:

$F_{Wx}=X_W=-b\dot{x}$, $F_{Wy}=Y_W=-b\dot{y}$ i $F_{Wz}=Z_W=-b\dot{z}$

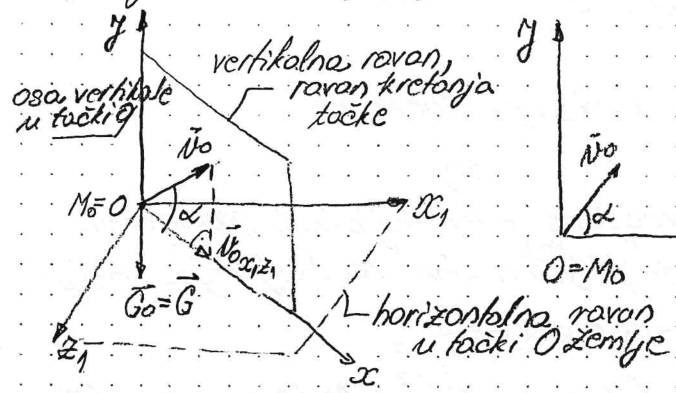
① Tačka M mase m bačena je sa površi Zemlje početnom brzinom intezitela v_0, pod uglom α u odnosu na horizontalnu ravan. Zanemarujući otpor vazduha i pretpostavljajući da se tačka kreće u homogenom polju teže, odrediti:

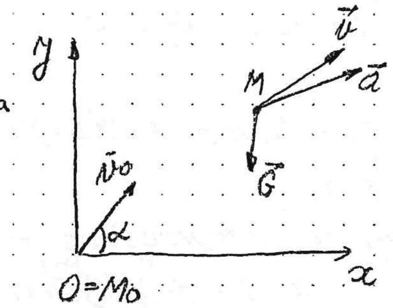
a) konačne jednačine kretanja tačke,

b) trajektoriju,

c) najveću visinu penjanja tačke,

d) najveći domet tačke.





a) Tačka M mase m kreće u homogenom polju sile Zemljine teže $\vec{G}$, što znači da sila $\vec{G}$, bez obzira u kojoj se tački polja nalazi materijalna tačka M, ima pravac vertikalne ose Oy u referentnoj tački O na površi Zemlje, smer ka centru Zemlje, dok joj je intezitet: $G = mg = const$, gde je $g = 9{,}81\ m/s^2$ ubrzanje sile Zemljine teže. Vektor sile Zemljine teže je, dakle:

$\vec{G} = -mg\vec{j}$.

Kretanje tačke M pod dejstvom sile $\vec{G}$ vrši se u vertikalnoj ravni Oxy u kojoj leži vektor početne brzine $\vec{v}_0$ i vektor sile teže u početnom trenutku $\vec{G}_0$. Osa Ox je horizonatalna osa u horizontalnoj ravni Ox_1z_1 vezanoj za površ Zemlje u tački O i na njoj se nalazi normalna projekcija vektora $\vec{v}_0$ na ravan Ox_1z_1.

Da bi se napisale diferencijalne jednačine kretanja tačke M potrebno je tačku M dovesti u položaj M koji odgovara nekom proizvoljnom trenutku t. U tom položaju pretpostavlja se da vektori brzine tačke $\vec{v} = \vec{v}(t)$ i ubrzanja tačke imaju pozitivne projekcije na ose referentnog koordinatnog sistema.

U položaju M koji tačka zauzima u trenutku t crtaju se vektori sila koji deluju na tačku. Pošto na tačku deluje samo sila $\vec{G}$, diferencijalna jednačina kretanja tačke M u vektorskom obliku biće:

$$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) = -mg\vec{j}. \qquad (1)$$

Projektovanjem leve i desne strane ove jednačine na ose DKS Oxy dobijaju diferencijalne jednačine kretanja tačke u pravcima osa Ox i Oy:

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g \qquad (3)$$

Prvi integrali jednačina (2) i (3) su:

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=0 \Rightarrow \dot{x}=C_1 \qquad (4)$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt}=-g \Rightarrow \int d\dot{y}=-g\int dt \Rightarrow \dot{y}=-gt+C_2 \qquad (5)$$

Za određivanje integracionih konstanti C_1 i C_2 koriste se početni uslovi za brzinu tačku:

$$t_0=0\ ;\ \dot{x}_0=V_{0x}=V_0\cos\alpha \quad i \quad \dot{y}_0=V_{0y}=V_0\sin\alpha$$

Zamenom ovih vrednosti u (4) i (5) dobija se:

$$C_1=V_0\cos\alpha\ ,\ C_2=V_0\sin\alpha,$$

pa su zakoni promene projekcija brzine $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$ tačke:

$$\dot{x}=V_0\cos\alpha \quad i \quad \dot{y}=-gt+V_0\sin\alpha \qquad (6)$$

U drugoj integraciji, tj daljom integracijom diferencijalnih jednačina prvog reda po funkcijama $x=x(t)$ i $y=y(t)$ (6) metodom razdvajanja, dobija se:

$$\frac{dx}{dt}=V_0\cos\alpha \Rightarrow \int dx=V_0\cos\alpha\int dt \Rightarrow x=(V_0\cos\alpha)t+C_3$$

i $$\frac{dy}{dt}=-gt+V_0\sin\alpha \Rightarrow \int dy=-g\int t\,dt+V_0\sin\alpha\int dt \Rightarrow y=-g\frac{t^2}{2}+V_0t\sin\alpha+C_4 \qquad (7)$$

Integracione konstante C_3 i C_4 određuju se korišćenjem početnih uslova za položaj tačke, koji shodno izabranom koordinatnom sistemu glase:

$$t_0=0 \Rightarrow x_0=x(t_0)=0 \quad i \quad y_0=y(t_0)=0$$

Zamenom ovih uslova u (7) dobija se:

$$C_3=0 \quad i \quad C_4=0,$$

pa konačne jednačine kretanja tačke, tj kosog hica u bezvazdušnom prostoru dobijaju oblik:

$$x=V_0t\cos\alpha \qquad (8)$$

$$y=V_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2} \qquad (9)$$

b) Linija putanje tačke dobija se eliminacijom vremena iz (8) i (9):

$$(8)\Rightarrow t=\frac{x}{V_0\cos\alpha} \xrightarrow{(9)} \boxed{y=x\,tg\alpha-\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2} \qquad (10)$$

Linija putanje tačke je parabola, a njena trajektorija je deo parabole za $x\geq0$ i $y\geq0$.

c) Najveća visina penjanja tačke je $H=y_{max}$. Iz uslova ekstremuma funkcije $y=y(x)$, $y'=0$, dobija se:

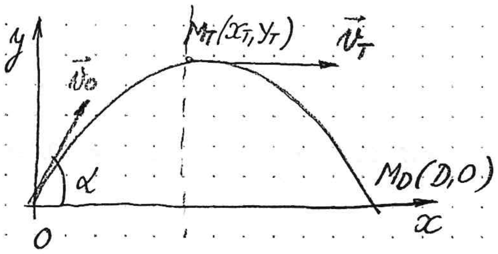
$$y'=tg\alpha-\frac{g}{V_0^2\cos^2\alpha}x \Rightarrow tg\alpha-\frac{g}{V_0^2\cos^2\alpha}x_T=0 \Rightarrow \boxed{x_T=\frac{V_0^2\sin2\alpha}{2g}},$$

pa je:

$$y_{max}=y_T=y(x_T) \Rightarrow \boxed{y_{max}=\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$$

Do istog rezultata može se doći i korišćenjem činjenice da je u najvišoj tački M_T na trajektoriji brzina horizontalna tj. da je $\dot{y}_T=0$ ($\vec{v}_T=\dot{x}_T\vec{i}$). Iz uslova: $\dot{y}_T=0$, određuje se trenutak t_T kada je tačka u položaju M_T, pa je:

$$y_T=y(t_T)=y_{max}.$$



Domet D predstavlja x-koordinatu položaja M_D u koji pada tačka M. Kako je $y_D = 0$, to važi jednačina:

$$x_D = 2x_T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \boxed{D = x_D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}} \quad (10)$$

Najveća vrednost dometa D biće kada je:

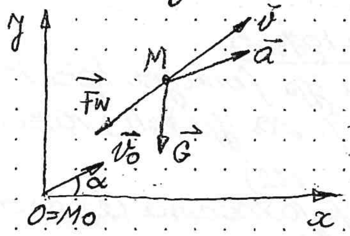
$\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45^\circ}$

i tada je: $\boxed{D_{max} = \frac{v_0^2}{g}}$.

Trenutak t_D može se odrediti iz jednačine:

$$x_D = D = v_0 t_D \cos\alpha \Rightarrow t_D = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

(2) Tačka M se kreće u homogenom polju sile Zemljine teže pod dejstvom sile otpora koja je proporcionalna intezitetu brzine sa koeficijentom proporcionalnosti $b = kmg$, gde je $k = const$. U početnom trenutku tačka je bila u koordinatnom početku DKS Oxy i imala brzinu $\vec{v}_0$ koja je gradila ugao α sa horizontalom. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke u odnosu na DKS Oxy.



Na tačku M tokom kretanja u homogenom polju sile Zemljine teže $\vec{G}$ (u vertikalnoj ravni Oxy) deluje pored sile $\vec{G}$ i sila otpora atmosfere $\vec{F_W}$. Pošto je intezitet sile otpora proporcionalan intezitetu vektora brzine $\vec{v}$ tačke M u posmatranom trenutku t, to se, kao što je pokazano u uvodnom delu, vektor sile otpora $\vec{F_W}$ može predstaviti u obliku:

$\vec{F_W} = -b\vec{v} = -kmg\,\vec{v}$,

tj. vektor sile otpora je kolinearan vektoru brzine tačke $\vec{v}$ u trenutku t ali je suprotnog smera od vektora $\vec{v}$, jer se vazduh (sredina) suprotstavlja kretanju mehaničkog objekta u njoj. Kako je u Dekartovom koordinatnom sistemu vektor brzine: $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$, to je vektor sile $\vec{F_W}$ u DKS Oxy:

$\vec{F_W} = -kmg(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j})$.

Osnovna jednačina dinamike u ovom zadatku je:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F_W} \Rightarrow m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) = -mg\vec{j} - kmg(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}), \quad (1)$$

pa su dif. jednačine kretanja u DKS Oxy:

$$m\ddot{x} = -kmg\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + kg\dot{x} = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -kmg\dot{y} - mg \Rightarrow \ddot{y} + kg\dot{y} = g \quad (3)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke M u pravcu ose Ox, jed. (2), je homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina ove jednačine je: $\lambda^2 + kg\lambda = 0$ i njeni koreni su: $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -kg$. Opšte rešenje ove jednačine je:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ tj. } x = C_1 e^{0 \cdot t} + C_2 e^{-kgt} \Rightarrow \boxed{x = C_1 + C_2 e^{-kgt}}. \quad (4)$$

Izvod po vremenu opšteg rešenja (4) je:

$\dot{x} = -C_2 kg e^{-kgt}$ (5).

Početni uslovi kretanja tačke M u pravcu ose Ox po položaju i po brzini su:

$t_0=0$, $x_0 = x(0) = 0$ (6)

i $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = V_0 \cos\alpha$ (7).

Zamenom (6) u (4), a (7) u (5), dobija se sistem algebarskih jednačina po integracionim konstantama C_1 i C_2:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2 \\ V_0 \cos\alpha = -C_2 kg \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{C_2} = -V_0 \cos\alpha / kg \\ \boxed{C_1} = -C_2 = V_0 \cos\alpha / kg \end{array}\right\} (8)$$

Zamenom (8) u (4) dobija se konačna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Ox:

$$\boxed{x(t)} = \frac{V_0}{kg}\cos\alpha\,(1 - e^{-kgt}) \quad (10)$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Oy (3) je nehomogena dif. jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Ova jednačina se može rešiti metodom neodređenih konstanti. Prema ovoj metodi opšte rešenje jednačine (3) se može predstaviti kao zbir homogenog dela rešenja y_h i partikularnog dela opšteg rešenja y_p, tj.:

$y = y_h + y_p$, (11)

gde je:

y_h rešenje odgovarajuće homogene jednačine: $\ddot{y}_h + kg\dot{y}_h = 0$, a y_p funkcija koja identički zadovoljava posmatranu diferencijalnu jednačinu, tj. za $y_p = y_p(t)$ važi:

$\ddot{y}_p + kg\dot{y}_p = -g$ (12)

Jednačina $\ddot{y}_h + kg\dot{y}_h = 0$ ima istu formu kao i dif. jednačina (2), pa su njeni koreni: $\lambda_3 = 0$ i $\lambda_4 = -kg$, što znači da je njeno opšte rešenje:

$y_h = C_3 + C_4 e^{-kgt}$ (13)

Pošto se na desnoj strani jednačine (3) nalazi polinom nultog reda, tj. konstanta, to bi i partikularni integral trebalo pretpostaviti u formi konstante, ako su oba korena karakteristične jednačine različita od nule. Međutim, u posmatranom slučaj jedan koren karakteristične jednačine je jednak nuli ($\lambda_3 = 0$), pa se partikularni deo opšteg rešenje pretpostavlja u formi polinoma prvog reda oblika:

$y_p = At$, (14)

gde je A konstanta koju treba odrediti iz (12). Kako je iz (14): $\dot{y}_p = A$ i $\ddot{y}_p = 0$, to (12) dobija oblik: $0 + kgA \equiv -g$, što znači da ~~je~~ konstanta A iznosi: $A = -\frac{1}{k}$, pa je $\boxed{y_p} = -\frac{1}{k}t$, a opšte rešenje jednačine (3) glasi:

$y = y_h + y_p = C_3 + C_4 e^{-kgt} - \frac{1}{k}t$ (15)

Izvod po vremenu (15) je:

$\dot{y} = -kg C_4 e^{-kgt} - 1/k$ (16)

Početni uslovi kretanja tačke M u odnosu na osu Oy po položaju i po brzini su:

$t_0 = 0$, $y_0 = y(0) = 0$ (17)

$\dot{y}_0 = \dot{y}(0) = V_0 \sin\alpha$ (18)

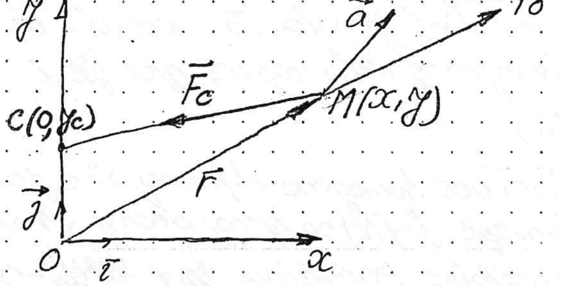
Zamenom (17) u (15), a (18) u (16) dobija se sistem algebarskih jednačina

$$\left.\begin{array}{l} 0 = C_3 + C_4 \\ V_0 \sin\alpha = -\frac{1}{k} - kgC_4 \end{array}\right\} \Rightarrow C_4 = -C_3 = -\frac{V_0 k \sin\alpha + 1}{k^2 g},$$

pa je zakon kretanja tačke u pravcu ose Oy: $\boxed{y = \frac{V_0 k \sin\alpha + 1}{k^2 g}(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}}$

(3) Materijalna tačka M mase m kreće se u ravni Oxy pod dejstvom odbojne centralne sile $\vec{F}_0$ čiji je centar nepokretna tačka O i privlačne centralne sile $\vec{F}_C$ čiji se centar kreće duž ose Oy po zakonu $y_C = b\cos\omega t$. Intezitet sile $\vec{F}_0$ je proporcionalan rastojanju tačke M od centra O te sile sa kojeficijentom proporcionalnosti mk^2, a intezitet sile F_C je proporcionalan rastojanju tačke M od centra C te sile sa koeficijentom proporcionalnosti $5mk^2$. Veličine b, ω i k su pozitivne konstante. Ako je u početnom trenutku tačka bila u položaju $M_0(0,0)$ u kome je imala brzinu $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ odrediti konačne jednačine kretanja tačke M, u slučaju da je:

a) $\omega \neq 2k$ i b) $\omega = 2k$



U proizvoljnom trenutku t tačka M zauzima položaj u ravni Oxy određen koordinatama $x=x(t)$ i $y=y(t)$. Vektor ubrzanja $\vec{a}$ tačke u tom trenutku, pretpostavlja se, da ima pozitivne projekcije $\ddot{x}=\ddot{x}(t)$ i $\ddot{y}=\ddot{y}(t)$ na ose DKS Oxy. Na slobodnu tačku M u ravni Oxy deluju sile:

1. $\boxed{\vec{F}_0 = mk^2\overrightarrow{OM}} = mk^2[(x(t)-\cancel{x_0}^{\,0})\vec{i} + (y(t)-\cancel{y_0}^{\,0})\vec{j}] \Rightarrow \boxed{\vec{F}_0 = mk^2x\vec{i} + mk^2y\vec{j}}$

i

2. $\boxed{\vec{F}_C = -5mk^2\overrightarrow{CM}} = -5mk^2[(x(t)-\cancel{x_C}^{\,0})\vec{i} + (y(t)-y_C)\vec{j}] \Rightarrow$

$\boxed{\vec{F}_C = -5mk^2x\vec{i} - 5mk^2(y - b\cos\omega t)\vec{j}}$ (Sila $\vec{G}$ se ne uzima se u obzir, jer nije rečeno da je ravan Oxy vertikalna, ili da je tačka teška)

Diferencijalna jednačina kretanja tačke M (II Njutnov zakon, zakon kretanja) je:

$m\vec{a} = \vec{F}_C + \vec{F}_0$,

pa su diferencijalne jednačina kretanja tačke M u pravcima osa Ox i Oy nepokretnog koordinatnog sistema Oxy:

$m\ddot{x} = F_{Cx} + F_{0x} \Rightarrow m\ddot{x} = mk^2x - 5mk^2x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 4k^2x = 0}$ (1)

i $m\ddot{y} = F_{Cy} + F_{0y} \Rightarrow m\ddot{y} = mk^2y - 5mk^2(y - b\cos\omega t)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 4k^2y = 5bk^2\cos\omega t}$ (2)

Diferencijalna jednačina (1) po funkciji $x=x(t)$ predstavlja nepotpunu, homogenu diferencijacijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njeno rešenje određeno je korenima λ_1 i λ_2 karakteristične jednačine $\lambda^2+4k^2=0$. Kako su koreni ove jednačine konjugovano kompleksni brojevi čiji je realni deo jednak nuli; tj. pošto je $\lambda_1 = i2k$ i $\lambda_2 = -i2k$, to se opšte rešenje jednačine (1): $x = C_1'e^{\lambda_1 t} + C_2'e^{\lambda_2 t}$ nakon odgovarajući transformacija (primenom Moavrovih formula) može napisati u obliku:

$x = C_1 \cos 2kt + C_2 \sin 2kt$ (3)

čiji je prvi izvod po vremenu:

$\dot{x} = -2kC_1 \sin 2kt + C_2 2k \cos 2kt$ (4)

S obzirom da je tačka u početnom trenutku $t_0=0$ zauzimala položaj $M_0(0,0)$ u kome je imala brzinu $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, to su početni uslovi za funkciju $x=x(t)$

$x(0) = x_0 = 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$. Njihovom zamenom u (3) i (4) dobija se sistem dve algebarske jednačine iz kojih slede da su vrednosti integracionih konstanti: $\boxed{C_1 = 0}$ i $\boxed{C_2 = v_0/2k}$, pa je konačna jednačina kretanja tačke M u pravcu ose Ox: $\boxed{x = x(t) = \frac{v_0}{2k}\sin 2kt}$ (5)

Diferencijalna jednačina (2) po funkciji $y=y(t)$ je nepotpuna, nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Pošto se na desnoj strani jednačine nalazi trigonometrijska, harmonijska funkcija vremena $f(t) = 56k^2\cos\omega t$, to će jednačina (2) biti rešena metodom neodređenih koeficijenata. To znači da se njeno opšte rešenje može predstaviti kao zbir homogenog dela tog rešenja y_h i partikularnog dela y_p: $y = y_h + y_p$. (6)

Homogeni deo opšteg rešenja y_h je rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine koja se dobija iz (2) kada se umesto funkcije $f=f(t)$ na njenoj desnoj strani, stavi nula. Dakle, $y_h = y_h(t)$ je rešenje diferencijalne jednačine $\ddot{y}_h + 4k^2 y_h = 0$. Pošto je ova jednačina istog tipa kao i prethodno rešavana jednačina (1) to je:

$\boxed{y_h} = C_3 \cos 2kt + C_4 \sin 2kt$; (7)

Partikularni deo opšteg rešenja $y_p = y_p(t)$ dif. jednačine (2), s obzirom da je na desnoj strani te jednačina harmonijska funkcija čija je kružna frekvenca ω, biće pretpostavljen u formi te funkcije ako je kružna frekvenca ω funkcije $f=f(t)$ različita od kružne frekvence homogenog dela opšteg rešenja (7). Dakle, za $\omega \neq 2k$, partikularni deo rešenja ima oblik:

$\boxed{y_p} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, (8)

gde su A i B konstante koje treba odrediti iz uslova da funkcija (8) identički zadovoljava jednačinu (2), tj da važi: $\boxed{\ddot{y}_p + 4k^2 y_p \equiv 56k^2\cos\omega t}$ (9)

Kako je: $\dot{y}_p = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$, a $\ddot{y}_p = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$, to se, nakon zamene (8) i $\ddot{y}_p = \ddot{y}_p(t)$ u (9) dobija:

$\boxed{\cos\omega t \cdot \boxed{A(4k^2-\omega^2)} + \sin\omega t \boxed{B(4k^2-\omega^2)} \equiv 56k^2\cos\omega t}$

Pošto su $\cos\omega t$ i $\sin\omega t$ linearno nezavisne funkcije gornji identitet biće zadovoljen ukoliko je:

$A(4k^2-\omega^2) = 56k^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{56k^2}{4k^2-\omega^2}}$

$B(4k^2-\omega^2) = 0 \Rightarrow B = 0$,

(konstante uz $\cos\omega t$ i $\sin\omega t$ na levoj i desnoj strani moraju biti jednake)

pa partikularni deo opšteg rešenja (8) glasi:

$\boxed{y_p} = \frac{56k^2}{4k^2-\omega^2}\cos\omega t$ (9)

Opšte rešenje (6) diferencijalne jednačine (2) u slučaju kada je $\omega \neq 2k$, je:

$$y = C_3 \cos 2kt + C_4 \sin 2kt + \frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2}\cos\omega t, \qquad (10)$$

dok je izvod po vremenu tog rešenja:

$$\dot{y} = -2kC_3 \sin 2kt + 2kC_4 \cos 2kt - \frac{5bk^2\omega}{4k^2-\omega^2}\sin\omega t \qquad (11)$$

Zamenom početnog uslova: $y(0)=0$ u (10) dobija se jednačina

$$0 = C_3 + \frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2} \Rightarrow \boxed{C_3 = -\frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2}} \qquad (12)$$

a uslova $\dot{y}(0)=0$ u (11):

$$0 = 2kC_4 \Rightarrow \boxed{C_4} = 0. \qquad (13)$$

Konačna jednačina kretanja u pravcu ose Oy za $\omega \neq 2k$, dobija se zamenom (12) i (13) u (10) i glasi:

$$\boxed{y = \frac{5bk^2}{4k^2-\omega^2}(\cos\omega t - \cos 2kt)}$$

U slučaju kada je $\omega = 2k$ partikularni deo rešenja se ne može pretpostaviti u obliku (8), s obzirom da bi tada partikularni deo rešenja i homogeni deo rešenja (7) bili linearno zavisni. Iz tog razloga partikularni deo rešenja dif. jed. (2) biće pretpostavljen u obliku:

$$\boxed{y_p} = t(A\cos 2kt + B\sin 2kt) \Rightarrow \dot{y}_p = A\cos 2kt + B\sin 2kt + t\cdot 2k(-A\sin 2kt + B\cos 2kt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y}_p} = 2\cdot 2k(-A\sin 2kt + B\cos 2kt) - 4k^2\underbrace{t(A\cos 2kt + B\sin 2kt)}_{x_p}$$

Identitet (9): $\ddot{y}_p + 4k^2 y_p = 5bk^2\cos 2kt$ dobija sada oblik:

$$-4kA\sin 2kt + 4kB\cos 2kt \equiv 5bk^2\cos 2kt$$

pa mora biti:

$$4kA = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

i $4kB = 5bk^2 \Rightarrow \boxed{B = \frac{5}{4}bk}$

Partikulni deo opšteg rešenja za $\omega = 2k$ glasi: $\boxed{y_p} = \frac{5}{4}bkt\sin 2kt$; (14)

dok je opšti integral dif. jed. (2) u ovom slučaju:

$$\boxed{y = C_3\cos 2kt + C_4\sin 2kt + \frac{5}{4}bkt\sin 2kt}. \qquad (15)$$

S obzirom da je izvod (15) po vremenu:

$$\dot{y} = -2kC_3\sin 2kt + 2kC_4\cos 2kt + \frac{5}{2}bk^2t\cos 2kt + \frac{5}{4}bk\sin 2kt,$$

to se za početne uslove $y(0)=0$ i $\dot{y}(0)=0$, dobijaju vrednosti integracionih konstanti: $\boxed{C_3 = 0}$ i $\boxed{C_4 = 0}$

pa je konačna jednačina kretanja tačke u pravcu ose Oy:

$$\boxed{y = \frac{5}{4}bkt\sin 2kt}$$