Математика 3

Душан Ђукић

7. Троструки интеграли

7.1. Увод

У овој глави се бавимо тродимензионалним - *тиросиируким* интегралима - у ознаци $\iiint$. Они се уводе потпуно аналогно двоструким интегралима, па ћу вас поштедети понављања приче о подели и интегралним сумама.

Између осталог, двоструки интеграл смо користили да одредимо запремину области V у простору задате једначином $z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)$, где је $(x,y) \in D$. Та иста запремина може се представити и као тродимензионални интеграл јединице по области V:

$$|V| = \iint\limits_D (z_2 - z_1)\,dxdy = \iint\limits_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} 1\,dz = \iiint 1\,dxdydz.$$

На исти начин, ако је $f : V \to \mathbb{R}$ ма која (интеграбилна) функција три промењиве, њен интеграл по области V би се рачунао као

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Ако је при томе и област D описана условом $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$ за $a \leqslant x \leqslant b$, онда је

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Троструки интеграл се може замислити као „количина" функције f у области V. На пример, ако је $f(x,y,z)$ *сиецифична шежина (іусшина)* материје у тачки (x,y,z), интеграл I представља *укуину масу* тела V.

Пример 7.1. Израчунати интеграл $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+y+z)^{3/2}}$, где је V област у простору дата условима $x,y,z \geqslant 0$ и $x+y+z \leqslant 1$.

Решење. - Границе за z зависе од x и y: $0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$.
- Да би то било могуће, мора да важи $0 \leqslant 1-x-y$, тј. $0 \leqslant y \leqslant 1-x$.
- Најзад, последњи услов је могућ само за $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Према томе, интеграл I се рачуна овако:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z)^{3/2}} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \cdot \frac{-2}{(x+y+z)^{1/2}}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \Big(\frac{2}{\sqrt{x+y}} - 2\Big) dy = \int_0^1 dx \cdot \big(4\sqrt{x+y} - 2y\big)\big|_{y=0}^{y=1-x} = \int_0^1 \big(4 - 4\sqrt{x} - 2 + 2x\big) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

7.2. Смена промењивих

Претпоставимо да је област V, уместо експлицитно, задата параметарски са три параметра:

$$V : (x,y,z) = \vec{r}(u,v,w), \quad \text{тј.} \quad \left\{ \begin{matrix} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{matrix} \right\} \quad \text{за} \quad (u,v,w) \in V',$$

где је V' област у uvw-простору, а функције x, y и z су (скоро свуда) непрекидно диференцијабилне. И овде морамо да претпоставимо да је пресликавање $(u,v,w)\mapsto(x,y,z)$ скоро свуда инјективно.

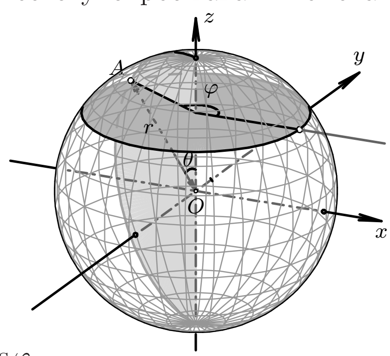
Како бисмо интеграл $I=\iiint_V f\,dxdydz$ исправно свели на интеграл по новим променљивим u, v и w, потребан нам је однос величина $dxdydz$ и $dudvdw$. Аргументи које користимо аналогни су онима из двоструких интеграла: када се тачка $(u,v,w)\in V'$ креће по квадру димензија $du\times dv\times dw$, одговарајућа тачка $(x,y,z)\in V$ описује паралелепипед разапет векторима $\vec{r}_u'\,du$, $\vec{r}_v'\,dv$ и $\vec{r}_w'\,dw$. Запремина тог паралелепипеда је $|J|\,dudvdw$, где је J *јакобијан* - у овом случају, то је детерминанта реда 3:

$$J=J(u,v,w)=(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v')\cdot\vec{r}_w'=\begin{vmatrix}x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\\ x_w' & y_w' & z_w'\end{vmatrix}.$$

Долазимо до закључка да је

$$dxdydz=|J|\,dudvdw,\quad \text{па је}\quad \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V'} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\cdot|J|\,dudvdw.$$

У својеврсној аналогији са поларним координатама, једна од често употребљаваних смена су *сферне координате* (r,θ,φ), прилагођене лопти:



$$x^2+y^2+z^2=r^2\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{array}\right\}$$

и

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

Уопштене сферне координате су, уместо лопте, прилагођене елипсоиду и гласе

$$\Big(\frac{x-x_0}{a}\Big)^2+\Big(\frac{y-y_0}{b}\Big)^2+\Big(\frac{z-z_0}{c}\Big)^2=r^2\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x=x_0+ar\sin\theta\cos\varphi\\ y=y_0+br\sin\theta\sin\varphi\\ z=z_0+cr\cos\theta\end{array}\right.\quad \text{и}\quad J(r,\theta,\varphi)=abc\cdot r^2\sin\theta.$$

Обично се узима $\theta\in[0,\pi]$ и $\varphi\in[0,2\pi)$, тако да је у оба случаја $J>0$ скоро свуда.

Користе се и једноставне (уопштене) поларне координате, само са додатом трећом координатом. Овде се те координате зову *цилиндричне*:

$$\left\{\begin{array}{l}x=x_0+ar\cos\varphi\\ y=y_0+br\sin\varphi\\ z=z\end{array}\right\}\quad \text{и}\quad J(r,\varphi,z)=ab\cdot r.$$

Пример 7.2. Израчунати интеграл $I=\iiint\limits_V x^2dxdydz$, где је V елипсоид $x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2\leqslant 1$.

Решење. Уведимо уопштене сферне координате:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=2r\cos\theta.$$

Тиме једначина елипсоида постаје просто $r\leqslant 1$. Дакле, област интеграције V' по r,θ,φ је квадар $0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ и $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

Коришћењем једнакости $dxdydz=2r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$ добијамо

$$I=\iiint\limits_{V'}(r\sin\theta\cos\varphi)^2\cdot 2r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\int_0^1 2r^4dr\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi=\frac{8\pi}{15},$$

јер је $\int_0^1 r^4dr=\frac{1}{5}$, $\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta=\frac{4}{3}$ и $\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\pi$.

7.3. Задаци

1. Израчунати $\displaystyle\int_0^\pi dx\int_0^x dy\int_y^x\sin z\,dz$.

2. Израчунати интеграл $I=\iiint\limits_V\dfrac{x}{z}\,dxdydz$, где је V област одређена условима $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 2z\leqslant 2$.

3. Израчунати $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$, ако је V просторна област изнад површи $\sigma : \{z = x^2\}$ и испод равни $\pi_1 : \{z = 2y\}$ и $\pi_2 : \{y + z = 3\}$.
4. Израчунати интеграл $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$, где је V део лопте $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ одређен условима $x \geqslant y$ и $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. Ако је V област између конуса $z^2 = x^2 + y^2$ и равни $z = 1$, израчунати $I = \iiint\limits_V z\,dxdydz$.
6. Област V је дата условом $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z$. Израчунати $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$.
7. Одредити запремину тела одређеног условима $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leqslant x$.
8. Израчунати $\iiint\limits_V e^{-x-y-z}dxdydz$, где је V област у простору дата условима $x \leqslant y \leqslant z \leqslant x + y$.
9. Ако је V део коцке $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ који се налази изнад површи $xyz = 1$, одредити $I = \iiint\limits_V x^2yz\,dxdydz$.
10. Одредити запремину тела V задатог условом $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 + x(y - z)$.
11. Нека је V област у простору одређена условима $y \leqslant 2x \leqslant y + 1$, $z \leqslant 2y \leqslant z + 1$ и $x \leqslant 2z \leqslant x + 1$. Израчунати $\iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz$.
12. Израчунати несвојствени интеграл $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-7/4} \operatorname{arctg}|x|\,dxdydz$, ако конвергира.
13. Израчунати запремину тела датог условом $|xy| + |yz| + |zx| \leqslant 1$.

7.4. Решења

1. Рачунамо редом: • $\int_y^x \sin z\,dz = -\cos z|_{z=y}^{z=x} = \cos y - \cos x$;

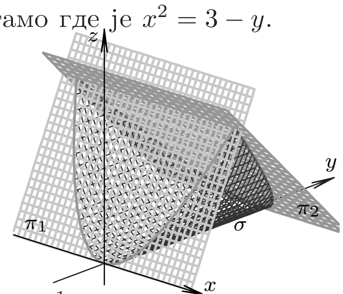
   • $\int_0^x dy \int_y^x \sin z\,dz = \int_0^x (\cos y - \cos x)\,dy = \sin x - x\cos x$;

   • $\int_0^\pi dx \int_0^x dy \int_y^x \sin z\,dz = \int_0^\pi (\sin x - x\cos x)\,dx = (-x\sin x - 2\cos x)|_{x=0}^{x=\pi} = 4$.

2. Видимо да је $0 \leqslant z \leqslant 1$, а даље је $0 \leqslant y \leqslant 2z$ и $0 \leqslant x \leqslant y$, па је
$$I = \int_0^1 dz \int_0^{2z} dy \int_0^y \frac{x}{z}\,dx = \int_0^1 dz \int_0^{2z} \frac{y^2 dy}{2z} = \int_0^1 \frac{4z^2 dz}{3} = \frac{4}{9}.$$

3. Дате равни се секу по правој $\{y = 1, z = 2\}$.
   - У полупростору $y \leqslant 1$ раван π_1 је „испод” π_2 и сече површ σ тамо где је $x^2 = 2y$.
   - У полупростору $y \geqslant 1$ раван π_2 је „испод” π_1 и сече површ σ тамо где је $x^2 = 3 - y$.

   Све у свему, просторна област V је унија области V_1 (за $y \leqslant 1$) и V_2 (за $y > 1$), где су:



$$V_1 : \left\{\begin{array}{c} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\sqrt{2y} \leqslant x \leqslant \sqrt{2y} \\ x^2 \leqslant z \leqslant 2y \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad V_2 : \left\{\begin{array}{c} 1 \leqslant y \leqslant 3 \\ -\sqrt{3-y} \leqslant x \leqslant \sqrt{3-y} \\ x^2 \leqslant z \leqslant 3 - y \end{array}\right\}.$$

Сада рачунамо:
$$I_1 = \iiint\limits_{V_1} z\,dxdydz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx \int_{x^2}^{2y} z\,dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} \frac{4y^2 - x^4}{2} dx = \int_0^1 \frac{4}{5}(2y)^{5/2} dy = \frac{32}{35}\sqrt{2},$$
$$I_2 = \iiint\limits_{V_2} z\,dxdydz = \int_1^3 dy \int_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} dx \int_{x^2}^{3-y} z\,dz = \int_1^3 dy \int_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} \frac{(3-y)^2 - x^4}{2} dx = \int_1^3 \frac{4}{5}(3-y)^{5/2} dy = \frac{64}{35}\sqrt{2}$$
и $I = I_1 + I_2 = \frac{96}{35}\sqrt{2}$.

4. Уводимо обичне сферне координате:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad J = r^2\sin\theta.$$

Услови задатка се могу записати као $r \leqslant 2$, $\cos\varphi \geqslant \sin\varphi$ и $0 \leqslant \cos\theta \leqslant \sin\theta$. То нам даје границе $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, па је тражени интеграл

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V z\,dxdydz &= \iiint\limits_{V'} r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^2 dr\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} r^3\cos\theta\sin\theta\,d\varphi \\ &= \pi\int_0^2 r^3dr\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \pi\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} = \pi\cdot 4\cdot\frac{1}{4} = \pi.\end{aligned}$$

5. Пројекција тела V на xy-раван је диск $D : x^2+y^2 \leqslant 1$. Уводимо цилиндричне координате:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right\}, \quad \text{при чему је} \quad V' : \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \\ r \leqslant z \leqslant 1 \end{array}\right\},$$

јер је $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Тражени интеграл је

$$I = \iiint\limits_{V'} z\cdot r\,drd\varphi dz = \int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_r^1 z\,dz = \int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\frac{1-r^2}{2} = 2\pi\int_0^1\frac{1-r^2}{2}\,dr = \frac{2\pi}{3}.$$

6. У обичним сферним координатама $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ и $z = r\cos\theta$ биће $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$, док услов из задатка гласи $r^2 \leqslant r\cos\theta$, тј. $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$. То нам пак индукује ограничење за θ: $0 \leqslant \cos\theta$, тј. $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, па је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{\cos\theta} r\cdot r^2\sin\theta\,dr = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta \\ &\overset{t=\cos\theta}{\underset{dt=-\sin\theta\,d\theta}{=}} \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 t^4\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}.\end{aligned}$$

7. Подесићемо сферне координате, али тако да променљива x има најједноставнији облик:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = 2r\sin\theta\cos\varphi \\ z = 3r\sin\theta\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \text{и} \quad J = 6r^2\sin\theta.$$

Услов из задатка је $r^4 \leqslant r\cos\theta$, тј. $0 \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{\cos\theta}$. Овај услов по r има смисла само ако је $\cos\theta \geqslant 0$, тј. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Према томе, запремина тела је

$$\iiint\limits_V 6r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\cos\theta}} 6r^2\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\cdot 2\cos\theta = 2\pi\cdot 1 = 2\pi.$$

8. Прво треба поставити границе. Дато је $y \leqslant z \leqslant x+y$, али да би уопште важило $y \leqslant x+y$, мора бити $x \geqslant 0$. Најзад, $x \leqslant y$. Према томе,

$$I = \int_0^{+\infty} dx\int_x^{+\infty} dy\int_y^{x+y} e^{-x-y-z}dz = \int_0^{+\infty} dx\int_x^{+\infty}(e^{-x-2y} - e^{-2x-2y})\,dy = \int_0^{+\infty}(e^{-3x} - e^{-4x})dx = \frac{1}{12}.$$

9. Област V је одређена условом $xyz \geqslant 1$. Нађимо границе трију променљивих.

- За z важи $\frac{1}{xy} \leqslant z \leqslant 2$.
- Даље, да би важило $\frac{1}{xy} \leqslant 2$, мора бити $\frac{1}{2x} \leqslant y \leqslant 2$.
- Најзад, да би важило $\frac{1}{2x} \leqslant 2$, мора бити $x \geqslant \frac{1}{4}$. Све у свему:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{4}}^2 x^2\,dx\int_{\frac{1}{2x}}^2 y\,dy\int_{\frac{1}{xy}}^2 z\,dz = \int_{\frac{1}{4}}^2 x^2\,dx\int_{\frac{1}{2x}}^2 y\left(2 - \frac{1}{2x^2y^2}\right)dy = \int_{\frac{1}{4}}^2 x^2\left(y^2 - \frac{\ln y}{2x^2}\right)\Big|_{y=\frac{1}{2x}}^{y=2} dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^2 x^2\left(4 - \frac{1+2\ln 2}{4x^2} - \frac{\ln(2x)}{2x^2}\right)dx = \int_{\frac{1}{4}}^2\left(4x^2 - \frac{1+4\ln 2}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)dx = \frac{133}{12} - 3\ln 2.\end{aligned}$$

10. Услов тела V може се записати као $x^2 - xy + y^2 + xz + z^2 \leqslant 1$, тј. $\frac{1}{2}x^2 + (\frac{1}{2}x - y)^2 + (\frac{1}{2}x + z)^2 \leqslant 1$. Уводимо смену $u = \frac{1}{\sqrt{2}}x$, $v = \frac{1}{2}x - y$, $w = \frac{1}{2}x + z$, тј.

$$\left\{\begin{aligned} x &= u\sqrt{2} \\ y &= u\tfrac{\sqrt{2}}{2} - v \\ z &= w - u\tfrac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{чији је јакобијан} \quad J = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}.$$

У новим променљивим услов задатка је V': $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$, а тражена запремина је

$$V = \iiint\limits_{V} dxdydz = \iiint\limits_{V'} \sqrt{2}\, dudvdw = \sqrt{2} \cdot (\text{запремина јединичне лопте}) = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}.$$

11. Намеће нам се смена

$$u = 2x - y, \quad v = 2y - z, \quad w = 2z - x,$$

јер тада је $0 \leqslant u, v, w \leqslant 1$, а притом је $x + y + z = u + v + w$. Јакобијан је

$$\frac{dudvdw}{dxdydz} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Другим речима, $dxdydz = \frac{1}{7}\, dudvdw$, па интеграл постаје

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{7}(u + v + w) dudvdw = \int_0^1 \frac{1}{7} u\, du + \int_0^1 \frac{1}{7} v\, dv + \int_0^1 \frac{1}{7} w\, dw = \frac{3}{14}\, .$$

12. Почећемо сферном сменом: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\theta\sin\varphi$, с новом облашћу интеграције V': $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Због симетрије у односу на yz-раван, дати интеграл је

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{V'} r^{-7/2} \mathrm{arctg}|r\cos\theta| \cdot r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r^{-3/2} \mathrm{arctg}|r\cos\theta| dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r^{-3/2} \mathrm{arctg}(r\cos\theta)\, dr. \end{aligned}$$

Унутрашњи интеграл $f(\theta) = \int_0^{\infty} r^{-3/2} \mathrm{arctg}(r\cos\theta)\, dr$ рачунамо парцијалном интеграцијом:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \left| {\scriptstyle u = \mathrm{arctg}(r\cos\theta) \atop du = \frac{\cos\theta\, dr}{r^2\cos^2\theta + 1}} \quad {\scriptstyle v = -2r^{-1/2} \atop dv = r^{-3/2} dr} \right| = \int u\, dv = uv\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int v\, du \\ &= \cancelto{0}{-2r^{-1/2} \mathrm{arctg}(r\cos\theta)\Big|_{r=0}^{r=\infty}} + 2\int_0^{\infty} \frac{r^{-1/2}\cos\theta\, dr}{r^2\cos^2\theta + 1} = \left| {\scriptstyle t = \sqrt{r\cos\theta} \atop dt = \frac{dr\sqrt{\cos\theta}}{2\sqrt{r}}} \right| = 4\sqrt{\cos\theta} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}. \end{aligned}$$

Интеграла $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^4+1}$ се сећамо: он је једнак $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, тако да је $f(\theta) = \pi\sqrt{2\cos\theta}$. Најзад,

$$I = 4\pi \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin\theta\, d\theta = 4\pi^2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta} \sin\theta\, d\theta = \left| {\scriptstyle s = \cos\theta \atop ds = -\sin\theta\, d\theta} \right| = 4\pi^2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{s}\, ds = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^2.$$

13. Тело из задатка је симетрично у односу на сваку координатну раван, па је довољно израчунати запремину у првом октанту (тј. са $x, y, z \geqslant 0$) и помножити је са 8. У првом октанту услов из задатка гласи $xy + yz + zx \leqslant 1$.

Уведимо смену $u = yz$, $v = zx$ и $w = xy$. Област интеграције постаје V': $u, v, w \geqslant 0$, $u + v + w \leqslant 1$ - другим речима, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1 - u$ и $0 \leqslant w \leqslant 1 - u - v$. Јакобијан је

$$\frac{dudvdw}{dxdydz} = \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2xyz = 2\sqrt{uvw},$$

тј. $dxdydz = dudvdw/(2\sqrt{uvw})$, па је тражена запремина једнака

$$\begin{aligned} V &= 8 \iiint\limits_{V'} \frac{dudvdw}{2\sqrt{uvw}} = 4\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} \int_0^{1-u} \frac{dv}{\sqrt{v}} \int_0^{1-u-v} \frac{dw}{\sqrt{w}} \\ &= 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} \int_0^{1-u} \frac{\sqrt{1-u-v}\, dv}{\sqrt{v}} = 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} \cdot \frac{(1-u)\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$