Математика 3

Душан Ђукић

8. Површински интеграли

8.1. Увод

У глави 5 упознали смо се са криволинијским интегралима, који представљају уопштења једноструких интеграла по кривим. Површински интеграли су нека врста дводимензионалне верзије криволинијских - тј. уопштења двоструких интеграла на површи. Као и по кривој, по површи се може интегралити *скаларно* или *векторско* поље.

Неопходан састојак је параметризација површи. Дакле, посматрамо површ Π задату параметарским једначинама по u и v:

$$\Pi : (x, y, z) = \vec{\sigma}(u, v), \quad \text{тј.} \quad \begin{Bmatrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{Bmatrix} \quad \text{за} \quad (u,v) \in D. \tag{21}$$

И овде подразумевамо да су функције x, y и z скоро свуда непрекидно диференцијабилне по u и v.

Први сусрет са површинским интегралом имали смо у одељку 6.4: тамо смо добили формулу за површину површи Π увођењем *диференцијала површине* $d\Pi$. Површина површи је интеграл јединице по површи, тј. $S = \iint_\Pi 1\, d\Pi := \iint_D 1\, d\Pi$, где је

$$d\Pi = |\vec{\sigma}_u' \times \vec{\sigma}_v'|\, dudv. \tag{22}$$

При томе је, наравно,

$$\vec{\sigma}_u' = (x_u', y_u', z_u'), \quad \vec{\sigma}_v' = (x_v', y_v', z_v'),$$

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z), \quad \text{где су} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}, \tag{23}$$

$$|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v| = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}.$$

Исти диференцијал је у употреби при интеграцији било које функције по површи. Ознаку $d\Pi$ свесно израбљујемо, без опасности од забуне.

Како је интеграл увек гранична вредност интегралне суме по „савршено финој” подели, не шкоди да се подсетимо интегралних сума.

- Први потребан састојак је *подела* површи Π на делове $\Pi_1, \dots, \Pi_n$. Ова подела је индукована поделом области D на делове $D_1, \dots, D_n$, тако да $\vec{r}$ слика део области D_i на део површи $\Pi_i = \vec{r}(D_i)$.
- На сваком од делова површи Π_i нам треба узорак - *истакнута тачка* P_i. Њу бисмо одредили као слику неке тачке $M_i \in D_i$: $P_i = \vec{r}(M_i)$.
- Најзад, „савршено фина подела” би се добила бесконачним уситњавањем поделе $\{D_1, \dots, D_n\}$. То подразумева да и највећи од дијаметара делова D_i тежи нули.

8.2. Интеграл скаларног поља по површи

Дата је функција $f = f(x, y, z)$ (тј. скаларно поље), дефинисана у тачкама површи Π одређене условима (21). Интегрална сума функције f је у овом случају

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Pi_i,$$

где је са Π_i означена површина дела површи Π_i. Интеграл

$$I = \iint\limits_{\Pi} f(x, y, z)\, d\Pi$$

функције f по површи Π је гранична вредност интегралне суме по савршено финој подели. Овај интеграл, познат и као *површински интеграл прве врсте*, интуитивно представља „количину” функције f на површи Π. На пример, ако површ замислимо као некакав плашт а $f(x, y, z)$ његову масу по јединици површине (густину), I ће бити укупна маса плашта.

Пошто је $d\Pi$ познато из формуле (22), свођење овог интеграла на обичан двоструки неће представљати изазов:

$$I = \iint\limits_{D} f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \cdot |\vec{\sigma}_u' \times \vec{\sigma}_v'|\, dudv,$$

У специјалном случају, када је површ Π експлицитно задата једначином $z = z(x, y)$ за $(x, y) \in D$, улоге параметара преузимају x и y. Тада је $\sigma(x, y) = (x, y, z)$, те је $\vec{\sigma}_x' = (1, 0, z_x')$, $\vec{\sigma}_y' = (0, 1, z_y')$ и $\vec{\sigma}_x' \times \vec{\sigma}_y' = (-z_x', -z_y', 1)$. Добијамо

$$d\Pi = \sqrt{1 + {z_x'}^2 + {z_y'}^2}\, dxdy$$

и

$$I = \iint\limits_{\Pi} f\, d\Pi = \iint\limits_{D} f\big(x, y, z(x, y)\big) \sqrt{1 + {z_x'}^2 + {z_y'}^2}\, dxdy.$$

Пример 8.1. Наћи интеграл $I = \iint\limits_{\Pi} x^2 z\, d\Pi$, где је Π део површи $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ испод равни $z = 2$.

Решење. Услов $z \leqslant 2$ је задовољен када је $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Како је

$$d\Pi = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \sqrt{1 + \Big(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^2 + \Big(\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy,$$

дати интеграл се своди на двоструки: $I = \sqrt{2} \iint_D x^2 \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, где је D диск $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Сада увођењем поларних координата

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} \right\}, \quad D' : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant r \leqslant 2 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{array} \right\}$$

добијамо

$$I = \sqrt{2} \iint\limits_{D'} r^3 \cos^2\varphi \cdot r\, drd\varphi = \sqrt{2} \int_0^2 r^4\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{32\pi\sqrt{2}}{5}.$$

Пример 8.2. Израчунати интеграл $I = \iint\limits_{\Pi} z^2\, d\Pi$, где је Π сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решење. Сферу је најлакше параметризовати сферним координатама с параметрима θ, φ и фиксираним $r = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{array} \right\} \quad \text{за} \quad D : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{array} \right\}.$$

Сада рачунамо $\vec{\sigma}_\theta' = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$, $\vec{\sigma}_\varphi' = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$ и

$$\vec{\sigma}_\theta' \times \vec{\sigma}_\varphi' = (\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad d\Pi = |\vec{\sigma}_\theta' \times \vec{\sigma}_\varphi'|\, d\theta d\varphi = \sin\theta\, d\theta d\varphi.$$

Следи да је

$$I = \iint\limits_{D} \cos^2\theta \cdot \sin\theta\, d\theta d\varphi = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\varphi = \int_0^\pi 2\pi\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

8.3. Интеграл векторског поља по површи

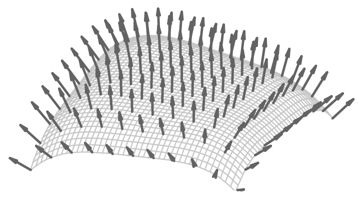
Посматрајмо векторско поље $\vec{A} = (P, Q, R)$ на површи Π. Интеграл поља $\vec{A}$ по површи Π, познат и као *површински интеграл друге врсте*, дефинише се као интеграл *нормалне компоненте* векторског поља. Другим речима, то је интеграл величине $\vec{A} \cdot \vec{n}$ по површи Π:

$$I = \iint\limits_{\Pi} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iint\limits_{\Pi} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \iint\limits_{\Pi} \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\Pi,$$

где $\vec{n}$ означава јединични вектор нормале на површ, дат у свакој тачки површи.

Површински интеграл друге врсте представља *проток* (или *флукс*) векторског поља кроз површ - тачније, кроз једну његову *страну*, одређену смером векторâ $\vec{n}$. Замислимо векторско поље $\vec{A}$ као поље струјања флуида који протиче кроз ту површ. Тангентна компонента овог поља тече паралелно површи и њен проток кроз површ је нула. Само нормална компонента $\vec{A} \cdot \vec{n}$ доприноси протоку, те I мери укупну количину флуида која прође кроз површ.

Вектор $\vec{n}$ у свакој тачки површи има један од два могућа смера. Захтева се доследност у избору смера, што значи да ове нормале $\vec{n}$ и саме треба да чине непрекидно векторско поље на површи. *Оријентација површи*, тј. његова *страна*, одређена је усмерењем поља нормала. Променом стране површи вектор нормале $\vec{n}$ мења знак, а самим тим и проток. То је интуитивно јасно: ако нпр. одозго надоле кроз површ (тј. кроз „горњу" страну) протекне количина I, онда одоздо нагоре „протекне" количина $-I$. Зато је у нормали $\vec{n}$ важно правилно подесити знак.

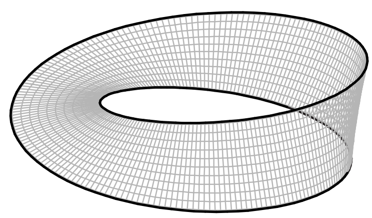


нормале на горњу страну површи

Површ често замишљамо као *двострану*: има две стране, нпр. „горњу" (нормале су усмерене нагоре) и „доњу" (нормале су усмерене надоле). Међутим, то није увек случај.

Пример 8.3. Спајање супротних крајева траке произвело би цилиндар. Међутим, ако притом обрнемо један крај траке, спајањем крајева добићемо *Мебијусову*[7] *траку*.

Мебијусова трака је *неоријентабилна*, тј. *једнострана* површ - има само једну страну. Зато интеграл друге врсте на њој нема смисла.



Размотримо интеграл I по оној страни површи Π која је одређена вектором нормале $\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v$. У том случају је, с обзиром на (22),

$$\vec{n} = \frac{\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v}{|\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v|} \quad \text{и} \quad \vec{n}\, d\Pi = \vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v\, dudv = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)\, dudv,$$

где су Δ_x, Δ_y и Δ_z детерминанте (јакобијани) из (23). Тако интеграл I поприма следећи облик:

$$\begin{aligned} I = \iint\limits_{\Pi} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy &= \iint\limits_{\Pi} \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\Pi = \iint\limits_{D} \vec{A} \cdot (\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v)\, dudv \\ &= \iint\limits_{D} (P \cdot \Delta_x + Q \cdot \Delta_y + R \cdot \Delta_z)\, dudv. \end{aligned} \tag{24}$$

Запажамо да је $dydz = \Delta_x\, dudv$, $dzdx = \Delta_y\, dudv$ и $dxdy = \Delta_z\, dudv$.

Интеграл векторског поља $\vec{A}$ по *другој* страни површи је $-I$.

Често се сусрећемо са специјалним случајем када је површ Π експлицитно задата једначином

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Оваква површ аутоматски има *горњу* и *доњу* страну. Нормала $\vec{\sigma}'_x \times \vec{\sigma}'_y = (-z'_x, -z'_y, 1)$ је тада усмерена *нагоре* и одређује горњу страну површи. Према томе, интеграл по горњој страни Π^+ ове површи биће

$$\iint\limits_{\Pi^+} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iint\limits_{D} (-P \cdot z'_x - Q \cdot z'_y + R)\, dxdy.$$

Интеграл по доњој страни Π^- добијамо простом променом знака:

$$\iint\limits_{\Pi^-} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iint\limits_{D} (P \cdot z'_x + Q \cdot z'_y - R)\, dxdy.$$

Пример 8.4. Нека је D област у xy-равни. Посматрана као површ, она има горњу страну D^+ и доњу страну D^-. Јединични вектори нормале на горњу и доњу страну су $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$, редом. Према томе:

(а) Површински интеграл $\iint\limits_{D^+} f(x, y)\, dxdy$ једнак је двоструком интегралу $\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$.

(б) Површински интеграл $\iint\limits_{D^-} f(x, y)\, dxdy$ једнак је $-\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$.

[7] *August Ferdinand Möbius* (1790-1868), немачки математичар

Пример 8.5. Наћи интеграл $\iint\limits_{\Pi^+} y\,dydz - z\,dzdx$, где је Π^+ горња страна површи $z = xy$ за $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

Решење. Овде је D квадрат $[0,1]\times[0,1]$. Пошто је $z = xy$, $z'_x = y$ и $z'_y = x$, тражени интеграл постаје

$$I = \iint\limits_D \big(y\cdot(-y) - xy\cdot(-x)\big)\,dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 (x^2y - y^2)\,dx = -\int_0^1 \Big(\frac{y}{3} - y^2\Big)\,dy = -\frac{1}{6}.$$

Пример 8.6. Израчунати интеграл $I = \iint\limits_{\Pi^-} x\,dydz + dzdx + dxdy$ по унутрашњој страни Π^- цилиндра $x^2+y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Решење. Увешћемо цилиндричне координате са фиксираним $r = 1$:

$$\begin{Bmatrix} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = z \end{Bmatrix}, \quad D : \begin{Bmatrix} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \end{Bmatrix}.$$

Користићемо формулу (24). Интегралимо векторско поље $\vec{A} = (x,1,1) = (\cos\varphi,1,1)$, а имамо $\vec{\sigma}'_\varphi = (-\sin\varphi,\cos\varphi,0)$ и $\vec{\sigma}'_z = (0,0,1)$, тако да је

$$\vec{\sigma}'_\varphi \times \vec{\sigma}'_z = (\cos\varphi,\sin\varphi,0)$$

вектор нормале на површ Π, али на коју страну површи? Проверимо то у произвољној тачки: на пример, за $z = \varphi = 0$ одговарајућа тачка на површи је $(1,0,0)$, а вектор нормале $\vec{\sigma}'_\varphi \times \vec{\sigma}'_z = (1,0,0)$ у њој усмерен је напоље. Према томе, вектори $\vec{\sigma}'_\varphi \times \vec{\sigma}'_z$ су усмерени на *сп̄ољну* страну. Пошто нама треба *унуш̄рашња* страна, тражени интеграл је

$$I = -\iint\limits_D \vec{A}\cdot(\vec{\sigma}'_\varphi\times\vec{\sigma}'_z)d\varphi dz = -\iint\limits_D (\cos^2\varphi+\sin\varphi)d\varphi dz = -\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi+\sin\varphi)d\varphi = -\int_0^1 \pi\,dz = -\pi.$$

8.4. Задаци

1. Израчунати интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x+z}\,dS$, где је S троугао са теменима $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$.

2. Површ Π у простору је дата параметарским једначинама $x = u(u+v)$, $y = v(u+v)$ и $z = uv$ за $0 \leqslant u, v \leqslant 1$. Одредити интеграл прве врсте $I = \iint\limits_\Pi (x-2z)\,d\Pi$.

3. Наћи $I = \iint\limits_\Pi xyz\,d\Pi$, где је Π део елипсоида $x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2 = 1$ дат условима $x, y \geqslant 0$ и $z \geqslant 1$.

4. Нека је Π део површи $z = xy$ у квадранту $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ унутар цилиндра $x^2+y^2 = 1$. Израчунати интеграл $I = \iint\limits_\Pi \dfrac{x\,d\Pi}{y+\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Израчунати интеграл $I = \iint\limits_\Pi \sqrt{1-z^2}\,d\Pi$, где је Π површ $z = \sin(x+y)$ за $0 \leqslant x, y \leqslant 2\pi$.

6. Површ S је дата једначином $z = \sqrt{2xy}$ за $0 \leqslant x \leqslant 2y \leqslant 2$. Израчунати $I = \iint\limits_S \sqrt{x+2y-2z}\,dS$.

7. Израчунати $I = \iint\limits_S y^2\,dS$, где је S део конуса $z^2 = x^2+y^2$ између равни $z = 0$ и $x-3z+6 = 0$.

8. Израчунати интеграл $I = \iint\limits_{\Pi^+} x^2dydz - y^2dzdx + z^2dxdy$, где је Π^+ горња страна дела равни $x+y+z = 3$ у првом октанту.

9. Израчунати проток векторског поља $\vec{A} = \vec{k} = (0,0,1)$ кроз *хеликоид* $(x,y,z) = (u\cos v, u\sin v, v)$, где су $0 \leqslant u \leqslant 1$ и $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

10. Израчунати интеграл $I = \iint_{\sigma^+} x^2\,dydz + 2y\,dzdx$, где је σ^+ горња страна дела конуса $x^2+y^2=z^2$ између равни $z=0$ и $z=1$.

11. Израчунати интеграл $I = \iint\limits_{\Pi^+} (xz+x+z)(dydz+dzdx+dxdy)$, где је Π^+ спољна страна дела цилиндра $x^2+y^2=2y$ између равни $z=0$ и $z=1$.

12. Израчунати проток поља $(x, y-x, z-y)$ кроз спољну страну дела сфере $x^2+y^2+z^2=4$ изнад равни $z=-1$.

13. Израчунати интеграл $\iint\limits_{S^+} x^2\,dydz + x\,dzdx + dxdy$, где је S^+ спољна страна површи $x^2+y^2+z^2 = 2(xy+xz+yz)$ за $0 \leqslant x+y+z \leqslant 1$.

8.5. Решења

1. Једначина равни троугла S је $z = 1-x-y$, а његова пројекција D на xy-раван је дата условима $x, y \geqslant 0$, $x+y \leqslant 1$. Према томе, границе области D су $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1-x$. Како је $dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{3}\,dxdy$, тражени интеграл је

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x+z}\cdot\sqrt{3}\,dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{1-y}dy = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{2}{3}\big(1-x^{3/2}\big)\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

2. Површ је задата пресликавањем $\sigma(u,v) = (u(u+v), v(u+v), uv)$, па је $\vec{\sigma}_u' = (2u+v, v, v)$ и $\vec{\sigma}_v' = (u, u+2v, u)$. Рачунамо $\vec{\sigma}_u'\times\vec{\sigma}_v' = \big(-2v^2, -2u^2, 2(u+v)^2\big)$ и одатле

$$d\Pi = |\vec{\sigma}_u'\times\vec{\sigma}_v'|\,dudv = 2\sqrt{u^4+v^4+(u+v)^4}\,dudv = 2(u^2+uv+v^2)\,dudv.$$

Притом је $x-2z = u(u-v)$. Област интеграције D је квадрат $0 \leqslant u, v \leqslant 1$. Добијамо

$$I = \iint\limits_D u(u-v)\cdot 2(u^2+uv+v^2)\,dudv = 2\int_0^1 du\int_0^1 u(u^3-v^3)dv = 2\int_0^1 u\Big(u^3-\frac{1}{4}\Big)\,du = \frac{3}{20}.$$

3. Постављамо сферне координате ($r=1$). Услов $z = 2\cos\theta \geqslant 1$ значи да је $\theta \leqslant \frac{\pi}{3}$, а услов $x, y \geqslant 0$ да је $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{array}\right\} \quad \text{за} \quad D: \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \end{array}\right\}.$$

Слично примеру 8.2, $\vec{\sigma}_\theta' = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -2\sin\theta)$, $\vec{\sigma}_\varphi' = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$ и

$$\vec{\sigma}_\theta'\times\vec{\sigma}_\varphi' = (2\sin^2\theta\cos\varphi, 2\sin^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta) \quad\Rightarrow\quad d\Pi = |\vec{\sigma}_\theta'\times\vec{\sigma}_\varphi'|\,d\theta d\varphi = \sin\theta\sqrt{4-3\sin^2\theta}\,d\theta d\varphi.$$

Следи да је

$$I = \int_0^{\pi/3}\sqrt{4-3\sin^2\theta}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sqrt{4-3\sin^2\theta}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \left|{t=4-3\sin^2\theta \atop dt=-6\sin\theta\cos\theta\,d\theta}\right| = \frac{1}{2}\int_1^4\sqrt{t}\cdot\frac{4-t}{3}\cdot\frac{1}{6}\,dt = \int_1^4\frac{4\sqrt{t}-t\sqrt{t}}{36} = \frac{47}{270}.$$

4. Област интеграције D је део диска $x^2+y^2 \leqslant 1$ за $x, y \geqslant 0$. Пошто је $d\Pi = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, следи

$$I = \iint\limits_D \frac{x\sqrt{1+x^2+y^2}}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

Увођењем поларних координата $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ за $D' : \{0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ добија се

$$I = \iint\limits_{D'} \frac{r\sqrt{1+r^2}\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\,drd\varphi = \int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Како је

– $\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr = \left|\begin{smallmatrix} t=1+r^2 \\ dt=2r\,dr\end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)$ и

– $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi} = \left|\begin{smallmatrix} t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \\ d\varphi=\frac{2dt}{1+t^2}\end{smallmatrix}\right| = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt = \frac{\pi}{2}-1,$

следи да је $I = \frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)(\frac{\pi}{2}-1) \approx 0{,}34789$.

5. Како је $\sqrt{1-z^2} = |\cos(x+y)|$ и $d\Pi = \sqrt{1+2\cos^2(x+y)} = \sqrt{3-2\sin^2(x+y)}$, имамо

$$I = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} |\cos(x+y)| \cdot \sqrt{3-2\sin^2(x+y)}\,dy = \left|\begin{smallmatrix} t=x+y \\ dt=dy\end{smallmatrix}\right| = \int_0^{2\pi} dx \int_x^{x+2\pi} |\cos t|\sqrt{3-2\sin^2 t}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} J\,dx = 2\pi J, \qquad \text{где је} \qquad J = \int_0^{2\pi} |\cos t|\sqrt{3-2\sin^2 t}\,dt.$$

Остаје да израчунамо интеграл J. Због периодичности синуса и косинуса имамо

$$J = 4\int_0^{\pi/2} \cos t\sqrt{3-2\sin^2 t}\,dt = \left|\begin{smallmatrix} u=\sin t \\ dt=\cos t\,dt\end{smallmatrix}\right| = 4\int_0^1 \sqrt{3-2u^2}\,du = 4\left(\frac{u\sqrt{3-u^2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\arcsin\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1.$$

Следи да је $J = 2+3\sqrt{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $I = 2\pi J \approx 9{,}50813$.

6. Увешћемо смену $x = 2u^2$ и $y = v^2$. Услов $x \leqslant 2y$ даје $u \leqslant v$, па је површ дата параметарским једначинама $\sigma(u,v) = (x,y,z) = (2u^2, v^2, 2uv)$ за $D: \{0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1\}$. Тада је

$$\vec{\sigma}'_u = (4u,0,2v), \quad \vec{\sigma}'_v = (0,2v,2u) \quad \text{и} \quad dS = |\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v|\,dudv = |(-4v^2, 8u^2, 8uv)|\,dudv = 4(2u^2+v^2)\,dudv.$$

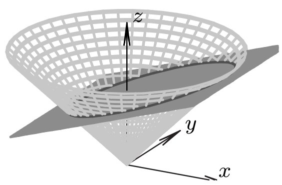
Пошто је $\sqrt{x+2y-2z} = \sqrt{2u^2+2v^2-4uv} = \sqrt{2}(v-u)$, тражени интеграл постаје

$$I = 4\sqrt{2}\iint_D (v-u)(2u^2+v^2) = 4\sqrt{2}\int_0^1 dv \int_0^v (v^3-uv^2+2u^2v-2u^3)\,du = 4\sqrt{2}\int_0^1 \frac{2}{3}v^4\,dv = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

7. Пошто је $z = \sqrt{x^2+y^2}$, имамо

$$dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy.$$

Сада је $I = \sqrt{2}\iint_D y^2\,dxdy$, где је D пројекција површи S на xy-раван. Из једначине равни налазимо $z = 2+\frac{1}{3}x$, што заменом у једначину цилиндра даје границу области D: $\frac{8}{9}(x-\frac{3}{4})^2+y^2 = \frac{9}{2}$. Према томе, област D се може описати у поларним координатама:



$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4}+\frac{3}{2\sqrt{2}}r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \text{за} \quad D': \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant r \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{array}\right\}.$$

Како је при томе $y^2 = r^2\sin^2\varphi$ и $dxdy = \frac{3}{2\sqrt{2}}r\,drd\varphi$, тражени интеграл је

$$I = \sqrt{2}\iint_{D'} r^2\sin^2\varphi \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}r\,drd\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} dr \int_0^{2\pi} r^3\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \pi r^3\,dr = \frac{243\pi}{32}.$$

8. Пројекција D површи Π^+ је дата условима $x, y \geqslant 0$ и $x+y \leqslant 3$, тј. $0 \leqslant x \leqslant 3$ и $0 \leqslant y \leqslant 3-x$. Даље је $z = 3-x-y$, па је $z'_x = z'_y = -1$ и

$$I = \iint_D \left(x^2\cdot(-1) - y^2\cdot(-1) + (3-x-y)^2\right)dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (9+2y^2+2xy-6x-6y)dy$$
$$= \int_0^3 \frac{1}{3}(x^3+9x^2-54x+54)dx = \frac{27}{4}.$$

9. Област интеграције је $D: \{0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\}$.
Како је $\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v = (\cos v, \sin v, 0) \times (-u\sin v, u\cos v, 1) = (\sin v, -\cos v, u)$, тражени проток је

$$\iint_D \vec{A}\cdot(\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v) = \iint_D \vec{k}\cdot(\sin v, -\cos v, u)\,dudv = \iint_D u\,dudv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u\,du = \pi.$$

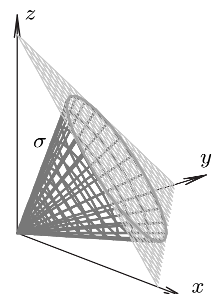
10. Пошто је $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_x=\frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}$ и $z'_y=\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}$, следи да је
$$I=\iint\limits_D\Big(x^2\big(\tfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)+2y\big(\tfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)+0\cdot 1\Big)dxdy=-\iint\limits_D\frac{x^3+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$
У поларним координатама $\left|{x=r\cos\varphi \atop y=r\sin\varphi}\right|$ област интеграције је $D':\{0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, па је
$$I=-\iint\limits_{D'}(r^3\cos^3\varphi+r^2\sin^2\varphi)\,drd\varphi=-\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}(\cancelto{0}{r^3\cos^3\varphi}+r^2\sin^2\varphi)\,d\varphi=-\int_0^1\pi r^2\,dr=\frac{\pi}{3}.$$

11. Крива $x^2+y^2=2y$ је круг $x^2+(y-1)^2=1$ и параметризује се као $x=\cos\varphi$ и $y=1+\sin\varphi$. Овако је површ дата пресликавањем $\vec\sigma(\varphi,z)=(\cos\varphi,1+\sin\varphi,z)$ за $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ и $0\leqslant z\leqslant 1$ и важи
$$\vec\sigma'_\varphi\times\vec\sigma'_z=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)\times(0,0,1)=(\cos\varphi,\sin\varphi,0).$$
Ово је нормала на спољну страну цилиндра: нпр. за $z=0$ и $\varphi=0$ то је нормала $(1,0,0)$ у тачки $(1,1,0)$. Даље, $xz+x+z=z(1+\cos\varphi)+\cos\varphi$. Према томе, тражени проток је
$$I=\iint\limits_D\vec A\cdot(\vec\sigma'_\varphi\times\vec\sigma'_z)\,d\varphi dz=\iint\limits_D\big((z+1)\cos\varphi+z\big)(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi dz$$
$$=\int_0^1dz\int_0^{2\pi}\big((z+1)\cos^2\varphi+\cancelto{0}{(z+1)\cos\varphi\sin\varphi}+\cancelto{0}{z(\cos\varphi+\sin\varphi)}\big)\,d\varphi=\int_0^1\pi(z+1)\,dz=\frac{3}{2}\pi.$$

12. Сферу параметризујемо сферним координатама са $r=2$; услов $z\geqslant -1$ се своди на $\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$:
$$\vec\sigma:\left\{\begin{array}{l}x=2\sin\theta\cos\varphi\\ y=2\sin\theta\sin\varphi\\ z=2\cos\theta\end{array}\right\}\quad\text{за}\quad D:\left\{\begin{array}{l}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi/3\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\end{array}\right\}.$$
Слично као у примеру 8.2 налазимо $\vec\sigma'_\theta\times\vec\sigma'_\varphi=4\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)=4(x,y,z)\sin\theta$, па је
$$\vec A\cdot(\vec\sigma'_\theta\times\vec\sigma'_\varphi)=4\sin\theta(x^2+y(y-x)+z(z-y))=4\sin\theta(1-xy-yz)$$
$$=4\sin\theta-16\sin^2\theta(\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi).$$
Тражени проток је
$$\iint\limits_D\vec A\cdot(\vec\sigma'_\theta\times\vec\sigma'_\varphi)d\theta d\varphi\int_0^{2\pi/3}d\theta\int_0^{2\pi}\big(4\sin\theta-16\sin^2\theta(\cancelto{0}{\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}+\cancelto{0}{\cos\theta\sin\varphi})\big)d\varphi=8\pi\int_0^{2\pi/3}\sin\theta d\theta=12\pi.$$

13. Једначина површи даје $z=x+y\pm 2\sqrt{xy}$, тј. $\sqrt z=\sqrt x\pm\sqrt y$. Зато можемо да уведемо параметризацију
$$\vec\sigma(u,v)=(x,y,z):\quad x=u^2,\ \ y=v^2,\ \ z=(u+v)^2.$$
Пошто (u,v) и $(-u,-v)$ дају исту тачку (x,y,z), сматраћемо да је $u\geqslant 0$. Даље, услов $x+y+z\leqslant 1$ постаје $u^2+uv+v^2\leqslant\frac12$, тј. $D:(u+2v)^2+3u^2\leqslant 2,\ u\geqslant 0$.

Интеграли се векторско поље $\vec A=(x^2,x,1)=(u^4,u^2,1)$. Вектор нормале на површ је $\vec\sigma'_u\times\vec\sigma'_v=2(u,0,u+v)\times 2(0,v,u+v)=4(-v(u+v),-u(u+v),uv)$. То је спољна нормала, јер нпр. за $(u,v)=(1,0)$ добијамо тачку $A(1,0,1)$ и нормалу $(-4,0,0)$ усмерену ван првог октанта. Према томе,
$$I=\iint\limits_D\vec A\cdot(\vec\sigma'_u\times\vec\sigma'_v)\,dudv=4\iint\limits_D\big(uv-u^3(u+v)-u^4v(u+v)\big)\,dudv.$$



За u и v можемо увести поларне координате:
$$\begin{array}{r}u+2v=r\cos\varphi\\ u\sqrt3=r\sin\varphi\end{array}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l}u=\frac{1}{\sqrt3}r\sin\varphi\\ v=\frac{1}{2\sqrt3}r(\sqrt3\cos\varphi-\sin\varphi)\end{array}\right\}\quad\text{за}\quad\left\{\begin{array}{l}0\leqslant r\leqslant\sqrt2\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\end{array}\right\},$$
чиме тражени интеграл постаје
$$I=\frac{2}{\sqrt3}\int_0^{\sqrt2}dr\int_0^\pi\Big[r^3\Big(\frac{\cos\varphi}{2\sqrt3}-\frac{\sin\varphi}{6}\Big)\sin\varphi-r^5\Big(\frac{\cos\varphi}{6\sqrt3}+\frac{\sin\varphi}{18}\Big)\sin^3\varphi-r^7\Big(\frac{1}{36}-\frac{\sin^2\varphi}{27}\Big)\sin^4\varphi\Big]\,d\varphi$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt3}\int_0^{\sqrt2}\Big(-\frac{1}{12}r^3-\frac{1}{48}r^5+\frac{1}{864}r^7\Big)\,dr=-\frac{47\pi}{216\sqrt3}.$$